$f(x)=3\cos 2x$，$g(x)=7\sin x$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|\,dx$ を求めよ．

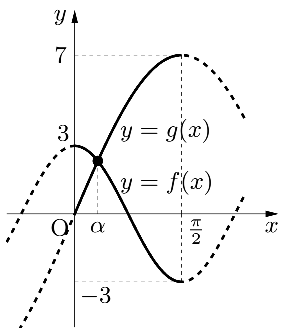
(23 兵庫県大 中 理 1)

【答】 $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}-7$

【解答】

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|\,dx \text{ とおく．}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標を求める．



$$\begin{aligned}
&3\cos 2x=7\sin x\\
&3(1-2\sin^2 x)=7\sin x\\
&6\sin^2 x+7\sin x-3=0\\
&(2\sin x+3)(3\sin x-1)=0
\end{aligned}$$

$2\sin x+3\neq 0$ より，x は $\sin x=\dfrac{1}{3}$ の解であり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解はただ1つ存在する．この解 x を α とおく．$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは右図となる．

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&=\int_0^{\alpha}(3\cos 2x-7\sin x)\,dx-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos 2x-7\sin x)\,dx\\
&=\left[\frac{3}{2}\sin 2x+7\cos x\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{3}{2}\sin 2x+7\cos x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=2\left(\frac{3}{2}\sin 2\alpha+7\cos\alpha\right)-7
\end{aligned}$$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ より

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\
&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
I&=2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}+7\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-7\\
&=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{2}}{3}-7} \qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．