関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\log\boxed{\text{え}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(23 宮崎大 工 1(4))

【答】

え
$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

【解答】

$$f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$$

置換積分法を用いる．

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{-(\cos x)'}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx \\
&= \int -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)(\cos x)'\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\log|1-\cos x| + \log|1+\cos x|\right) + C \quad (C\text{ は積分定数}) \\
&= -\frac{1}{2}\log\frac{|1+\cos x|}{|1-\cos x|} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

$1-\cos^2 x \fallingdotseq 0$ なので $\cos x \fallingdotseq \pm 1$ であり $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} > 0$ であるから

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\log\boldsymbol{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．