以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x\,dx$ を求めよ．

(3) $m,\ n$ を自然数とする．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{2023} \sin kx\right)^2 dx$ を求めよ．

(23 富山大 後 工・都市 1)

【答】

(1) π

(2) 0

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} \pi & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$

(4) 2023π

【解答】

(1) 半角の公式を用いて，次数を下げると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi - (-\pi)}{2} \\ &= \boldsymbol{\pi} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) 積を和に直す公式を用いると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(x+2x) - \cos(x-2x)\}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 3x - \cos x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} - \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) 積を和に直す公式より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

である．$m,\ n$ は自然数であるから $m+n > 0$ であるが，$m-n$ は整数である．$m-n = 0,\ \neq 0$ で場合分けをする．

(i) $m = n$ のとき，① は

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx\, dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2mx - 1)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2mx}{2m} - x\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}(-\pi + (-\pi)) \\ &= \pi\end{aligned}$$

(ii) $m \neq n$ のとき，① は

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

以上，(i)(ii) より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{\sin mx \sin nx\, dx} = \begin{cases} \boldsymbol{\pi} & \boldsymbol{(m = n \text{ のとき})} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(m \neq n \text{ のとき})} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 与式は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{2023} \sin kx\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin 2023x)^2\, dx$$

であり，被積分関数を展開すると，$\sin mx \sin nx$ の和 (m, n の順序も区別すると 2023^2 個の和) と表される．それぞれの定積分を行うと，(3) から $m = n$ の項のみが残る．したがって

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2 2023x)\, dx \\ &= \underbrace{\pi + \pi + \pi + \cdots + \pi}_{2023 \text{ 個}} \quad (\because\ (3)) \\ &= \boldsymbol{2023\pi} \quad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．