定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(23 岡山県大 中 情報工 4(1))

【答】 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$

【解答】

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

とおく．$x=\sin\theta$ とおくと

$$dx=\cos\theta\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\theta\,d\theta \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{6}} -(1-\cos^2\theta)(\cos\theta)'\,d\theta \\ &=-\left[\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &=-\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right\}+\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{2}{3} \\ &=\boldsymbol{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\theta\,d\theta$ の計算は 3 倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

を用いてもよい．

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\theta\,d\theta \\ &=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3\sin\theta-\sin 3\theta)\,d\theta \\ &=\frac{1}{4}\left[-3\cos\theta+\frac{\cos 3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &=\frac{1}{4}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+0+3-\frac{1}{3}\right) \\ &=\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$

である．