不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-2}{2x^3+x^2-5x+2}\,dx$ を求めよ．

(23 岡山県大 中 情報工 4(3))

【答】 $\dfrac{1}{3}\log|x-1| - \dfrac{2}{15}\log|x+2| + \dfrac{3}{10}\log|2x-1| + C$ (C は積分定数)

【解答】

$$I = \int \frac{x^2+2x-2}{2x^3+x^2-5x+2}\,dx$$

とおく．

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-2}{2x^3+x^2-5x+2} &= \frac{x^2+2x-2}{(x-1)(x+2)(2x-1)}\\ &= \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{2x-1}\end{aligned}$$

がつねに成立するような定数 a, b, c を求める．右辺を通分し，左辺の分子と比較する．

$$\begin{aligned}&x^2+2x-2\\ &= a(x+2)(2x-1)+b(x-1)(2x-1)+c(x-1)(x+2) \qquad \cdots\cdots ㋐\end{aligned}$$

は x についての恒等式であるから，$x=1,\ -2,\ \dfrac{1}{2}$ を順次代入すると

$$\begin{cases}3a=1\\ 15b=-2\\ -\dfrac{5}{4}c=-\dfrac{3}{4}\end{cases} \qquad \therefore\quad a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{2}{15},\ c=\frac{3}{5}$$

である．これより

$$\begin{aligned}I &= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx - \frac{\frac{2}{15}}{x+2} + \frac{\frac{3}{5}}{2x-1}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{2}{15}\log|x+2| + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1| + C \quad (C \text{ は積分定数})\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{2}{15}\log|x+2| + \frac{3}{10}\log|2x-1| + C} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．

- a, b, c の値は ㋐ を展開すると

$$\begin{aligned}x^2+2x-2 &= a(2x^2+3x-2)+b(2x^2-3x+1)+c(x^2+x-2)\\ &= (2a+2b+c)x^2+(3a-3b+c)x-2a+b-2c\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{cases}2a+2b+c=1\\ 3a-3b+c=2\\ -2a+b-2c=-2\end{cases}$$

を解いて

$$a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{2}{15},\ c=\frac{3}{5}$$

としてもよい．