不定積分 $\displaystyle\int (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)\,dx$ を求めよ.

(23 岡山県大 情報工 1(3))

【答】 $\dfrac{1}{4}\sin 4x + C \quad (C$ は任意定数$)$

【解答】

被積分関数の次数下げを考える.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\\ &= \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\int (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)\,dx\\ =&\int \{(3+4\cos 2x+\cos 4x)-4(1+\cos 2x)+1\}\,dx\\ =&\int \cos 4x\,dx\\ =&\ \boldsymbol{\frac{1}{4}\sin 4x + C \quad (C\ \text{は任意定数})}\end{aligned}$$ ……(答)

である.