以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 等式 $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})} = \dfrac{a}{e^x+e^{-x}} + \dfrac{b}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ が x についての恒等式となる実数 a, b の値を求めよ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $J = \displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ の値を求めよ．

(4) 定積分 $K = \displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})}\,dx$ の値を求めよ．

(23 工学院大 工・情報・先進工・建築 4)

【答】

(1) $a = \dfrac{1}{2}$,　$b = -\dfrac{1}{2}$

(2) $I = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $J = \dfrac{\pi}{12}$

(4) $K = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

【解答】

(1) 左辺を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})} \\
&= \frac{1}{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}+2)} \\
&= \left(\frac{1}{e^x+e^{-x}} - \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\right)\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+e^{-x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}
\end{aligned}
$$

となるから，$\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})} = \dfrac{a}{e^x+e^{-x}} + \dfrac{b}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ が x についての恒等式となる実数 a, b の値は

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2},\quad b = -\frac{1}{2}}$$ ……(答)

である．

- 与式は

  $$a(1+e^x)(1+e^{-x}) + b(e^x+e^{-x}) = 1$$

  と変形される．これが x についての恒等式となるためには，$x=0$, 1 を代入して

  $$\begin{cases} 4a+2b=1 \\ a(1+e)(1+e^{-1}) + b(e+e^{-1}) = 1 \end{cases}$$

  が成り立つことが必要である．

  $$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2} - 2a \\ a(1+e)(1+e^{-1}) + \left(\dfrac{1}{2} - 2a\right)(e+e^{-1}) = 1 \end{cases}$$

第 2 式を解くと

$$a(1+e^{-1}+e+1-2e-2e^{-1})=\frac{1}{2}(2-e-e^{-1})$$
$$a(2-e-e^{-1})=\frac{1}{2}(-e+2-e^{-1})$$
$$\therefore\quad a=\frac{1}{2}$$

第 1 式に代入して

$$b=-\frac{1}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{\frac{1}{2}}{e^x+e^{-x}}-\frac{\frac{1}{2}}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\\&=\frac{1}{2}\,\frac{(1+e^x)(1+e^{-x})-(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})}\\&=\frac{1}{2}\,\frac{(2+e^x+e^{-x})-(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})}\\&=\frac{1}{(e^x+e^{-x})(1+e^x)(1+e^{-x})}\\&=(\text{左辺})\end{aligned}$$

であり，与式は x についての恒等式である (十分である).

よって

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2}$$

である.

(2) $$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\qquad\begin{array}{c|ccc}x&0&\longrightarrow&1\\\hline\theta&0&\longrightarrow&\frac{\pi}{4}\end{array}$$

であるから

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(3) $$J=\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

$t=e^x$ とおくと

$$dt=e^x\,dx\qquad\therefore\quad dx=\frac{dt}{t}\qquad\begin{array}{c|ccc}x&0&\longrightarrow&\log\sqrt{3}\\\hline t&1&\longrightarrow&\sqrt{3}\end{array}$$

であるから

$$J=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t+t^{-1}}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$t = \tan\theta$ とおくと

$$dt = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 1 & \longrightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

……(答)

である.

(4) $$K = \int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{(e^x + e^{-x})(1 + e^x)(1 + e^{-x})}\,dx$$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^{\log\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{ J - \int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\,dx \right\} \end{aligned}$$

ここで，$L = \displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\,dx$ とおく．$u = 1 + e^x$ とおくと

$$du = e^x\,dx \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \log\sqrt{3} \\ \hline u & 2 & \longrightarrow & 1+\sqrt{3} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{u(1+e^{-x})}\frac{1}{e^x}\,du \\ &= \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{u^2}\,du \\ &= \Big[-\frac{1}{u}\Big]_2^{1+\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}-1}{3-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{24} - \frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

……(答)

である.