$$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} \, dx$$

(23 広島市大 情報科学 1(3)(i))

【答】
$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|+C$$
 (C は積分定数)

【解答】

 $2x^{2} + x - 1 = (x+1)(2x-1)$ である.

$$\frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{2x - 1}$$

がつねに成り立つような定数 a, b を求める。右辺を通分し、左辺の分子と比較すると

$$1 = a(2x - 1) + b(x + 1)$$
 ①

① はxについての恒等式であるから、 $x=-1,\ rac{1}{2}$ を順次代入すると

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ \frac{3}{2}b = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad a = -\frac{1}{3}, \ b = \frac{2}{3}$$

である. これより

$$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{3} \frac{1}{2x - 1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \log|x + 1| + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \log|2x - 1| + C \quad (C は積分定数)$$

$$= \frac{1}{3} \log \left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| + C \qquad \cdots (答)$$

となる.

a, bの値は ① を展開すると

$$1 = (2a+b)x - a + b$$

となるから, 係数を比較して

$$\begin{cases} 2a+b=0\\ -a+b=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$$

としてもよい.