$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(x+\tan x)\,dx$ であり，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|x+\tan x|\,dx$ である．

(23 愛媛大 教育・理・医・工 4(3))

【答】 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(x+\tan x)\,dx=0$，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|x+\tan x|\,dx=\frac{\pi^2}{9}+2\log 2$

【解答】

$y=x+\tan x$ は奇関数なので

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(x+\tan x)\,dx=\mathbf{0}$$ ……(答)

であり，$y=|x+\tan x|$ は偶関数なので

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|x+\tan x|\,dx&=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx\\&=2\left[\frac{x^2}{2}-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\pi^2}{9}-2\log\frac{1}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{9}+2\log 2}\end{aligned}$$ ……(答)

である．