関数

$$f(x)=\frac{x^2}{1+e^x}$$

について，

$$g(x)=f(x)+f(-x),\quad h(x)=f(x)-f(-x)$$

とおく．以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 定積分

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

の値を求めよ．

(2) $h(x)$ は奇関数であることを示せ．

(3) 定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

の値を求めよ．

(23 愛知教大 5)

【答】

(1) $\dfrac{2}{3}$

(2) 略

(3) $\dfrac{1}{3}$

【解答】

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2}{1+e^x},\\ g(x)&=f(x)+f(-x),\\ h(x)&=f(x)-f(-x)\end{aligned}$$

(1) $g(x)$ を整理すると

$$\begin{aligned}g(x)=f(x)+f(-x)&=\frac{x^2}{1+e^x}+\frac{(-x)^2}{1+e^{-x}}\\ &=\frac{x^2}{1+e^x}+\frac{x^2e^x}{e^x+1}=\frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x}\\ &=x^2\end{aligned}$$

である．$g(x)$ が偶関数であることに注意すると

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2dx=2\int_{0}^{1} x^2\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\mathbf{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $h(-x)=-h(x)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}h(-x)&=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)\\ &=-\{f(x)-f(-x)\}\\ &=-h(x)\end{aligned}$$

であり，$h(x)$ は奇関数である． ……(証明終わり)

(3) $f(x)$ を $g(x)$, $h(x)$ で表し，(1)，(2) の利用を考える．

$$g(x)+h(x)=2f(x)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{g(x)+h(x)\}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+0\right) \quad (\because\ (1),\ (2)) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．