次の空欄 $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙（省略）の所定の欄の番号をマークせよ．なお，解答群から同じものを 2 回以上選んでもよい．

$t > 0$ に対して，次の 2 つの定積分を考える．

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \sin x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx$$

部分積分を用いれば，

$$I = \boxed{ア} - tJ, \quad J = \boxed{イ} + tI$$

が成り立つことがわかるので，

$$I = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \quad J = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{エ}}$$

を得る．したがって，$\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{\log\left(\boxed{エ}\right)}{t} = 0$ を用いれば，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx - \frac{t}{\boxed{エ}}\right) = \boxed{カ}$$

となる．

ア，イ，エの解答群

⓪ -1　① 1　② $-\pi$　③ π　④ $1-t$
⑤ $1+t$　⑥ $1-t^2$　⑦ $1+t^2$　⑧ $-e^{-\frac{\pi}{2}t}$　⑨ $e^{-\frac{\pi}{2}t}$

ウ，オの解答群

⓪ t　① 1　② $-1-te^{-\frac{\pi}{2}t}$　③ $-1+te^{-\frac{\pi}{2}t}$　④ $1-te^{-\frac{\pi}{2}t}$
⑤ $1+te^{-\frac{\pi}{2}t}$　⑥ $-t-e^{-\frac{\pi}{2}t}$　⑦ $-t+e^{-\frac{\pi}{2}t}$　⑧ $t-e^{-\frac{\pi}{2}t}$　⑨ $t+e^{-\frac{\pi}{2}t}$

カの解答群

⓪ 0　① $-\frac{\pi}{2}$　② $-\frac{\pi}{3}$　③ $-\frac{\pi}{4}$　④ $-\frac{\pi}{6}$
⑤ $\frac{\pi}{12}$　⑥ $\frac{\pi}{6}$　⑦ $\frac{\pi}{4}$　⑧ $\frac{\pi}{3}$　⑨ $\frac{\pi}{2}$

(23 明治大 理工・総合数理・政経 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	9	4	7	9	1

【解答】

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \sin x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx$$

部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I &= \Big[e^{-tx} \cdot (-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-te^{-tx}) \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= 1 - t\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx \\ &= \mathbf{1} - tJ \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

……(答)

$$
\begin{aligned}
J &= \Big[e^{-tx}\cdot\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-te^{-tx})\cdot\sin x\,dx \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}t} + t\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx}\sin x\,dx \\
&= \boldsymbol{e^{-\frac{\pi}{2}t}} + tI \qquad \cdots\cdots \text{②} \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

① かつ ② より

$$
\begin{cases} I + tJ = 1 \\ tI - J = -e^{-\frac{\pi}{2}t} \end{cases}
$$

であり，これを解くと

$$
(1+t^2)I = 1 - te^{-\frac{\pi}{2}t} \qquad \therefore \quad I = \boldsymbol{\frac{1-te^{-\frac{\pi}{2}t}}{1+t^2}}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

$$
(t^2+1)J = t + e^{-\frac{\pi}{2}t} \qquad \therefore \quad J = \frac{\boldsymbol{t+e^{-\frac{\pi}{2}t}}}{1+t^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

したがって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t} = 0$ を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx}\cos x\,dx - \frac{t}{1+t^2}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(\frac{t+e^{-\frac{\pi}{2}t}}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{e^{-\frac{\pi}{2}t}}{1+t^2} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left\{\log e^{-\frac{\pi}{2}t} - \log(1+t^2)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{\log(1+t^2)}{t}\right\} \\
&= \boldsymbol{-\frac{\pi}{2}} \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

となる．

- $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t} = 0$ を確認しておく．

  $t = \dfrac{1}{u}$ とおくと，$t\to\infty$ のとき $u\to +0$ であり

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t} &= \lim_{u\to+0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to+0} u\log\frac{u^2+1}{u^2} \\
&= \lim_{u\to+0} u\{\log(1+u^2) - \log u^2\} \\
&= \lim_{u\to+0}\left\{u^3\frac{\log(1+u^2)}{u^2} - 2u\log u\right\} \qquad \cdots\cdots \text{㋐}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{u\to+0}\frac{\log(1+u^2)}{u^2} = 1$ （$\because$ e の定義) である．

$\displaystyle\lim_{u\to+0} u\log u$ について調べる．$v = \log u$ とおくと $u = e^v$ であり

$$
u\log u = e^v v
$$

$u\to+0$ のとき $v\to-\infty$ なので，$v=-x$ とおくと $x\to\infty$ であり

$$
u\log u = e^{-x}(-x) = -\frac{x}{e^x}
$$

となる．$x>0$ のとき $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことは認める (教科書の例題)．

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x}{2}} \underset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ である．すなわち，$\displaystyle\lim_{u\to+0} u\log u = 0$ である．

よって，㋐ より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t} = 0\cdot 1 - 2\cdot 0 = 0$$

である．