定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{(\cos x+x^2)e^{x^3}-e^{-x^3}\cos x\}\,dx$ を求めよ．

(23 東京電機大 工・未来科学・理工・シスデザ工 1(5))

【答】 $\dfrac{1}{3}(e^{\pi^3}-e^{-\pi^3})$

【解答】

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{(\cos x+x^2)e^{x^3}-e^{-x^3}\cos x\}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{(e^{x^3}-e^{-x^3})\cos x+x^2e^{x^3}\}\,dx$$

ここで，$f(x)=(e^{x^3}-e^{-x^3})\cos x$ とおくと

$$f(-x)=(e^{-x^3}-e^{x^3})\cos x=-(e^{x^3}-e^{-x^3})\cos x=-f(x)$$

であり，$f(x)$ は奇関数ある．したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x(e^{x^3}-e^{-x^3})dx=0$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{x^3}\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3}(x^3)'e^{x^3}\,dx\\&=\frac{1}{3}\left[e^{x^3}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(e^{\pi^3}-e^{-\pi^3})}\end{aligned}$$ ……(答)

である．