$|x| < 1$ となる x に対して関数 $S(x)$ を

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

として定義します．このとき，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{x}$ を求めなさい．

(2) $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を求めなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ を求めなさい．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(x)\,dx$ を求めさない．

(23 横浜市大 理・医・データ 4)

【答】

(1) 1

(2) $\dfrac{\pi}{4}$

(3) $-\sqrt{1-t^2}+C$ (C は積分定数)

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$

【解答】

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(1) $S(0) = 0$ であるから

$$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{S(0+x)-S(0)}{x} = S'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ において，$t = \sin\theta$ とおくと

$$dt = \cos\theta\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 置換積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int -\frac{1}{2}\,\frac{(1-t^2)'}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-t^2}+C \quad (C\text{ は積分定数}) \\ &= \boldsymbol{-\sqrt{1-t^2}+C} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(4) 部分積分法を用いと

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x)' S(x)\,dx \\
&= \Big[xS(x)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} xS'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \Big[\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad (\because\ (2),\ (3)) \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \qquad \cdots\cdots (答)
\end{aligned}
$$

である.