定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

を計算しなさい．

(23 福島大 後 共生システム理工 1(2))

【答】 $\pi+\sqrt{3}$

【解答】

$x=2\sin\theta$ とおくと

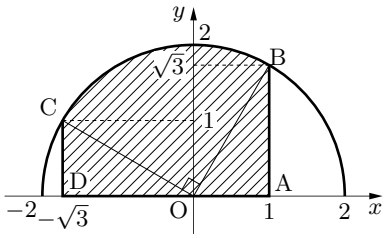
$$dx = 2\cos\theta\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -\sqrt{3} & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & -\dfrac{\pi}{3} & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{3}}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 4|\cos\theta|\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\theta\,d\theta \quad (\because\ \cos\theta>0) \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \quad (\because\ \text{半角の公式}) \\
&= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 2\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} \\
&= \boldsymbol{\pi+\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ は，原点を中心とする半径 2 の円の上側半分であり，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$ は右図の斜線部分の面積である．A$(1,\ 0)$，B$\left(1,\ \sqrt{3}\right)$，C$\left(-\sqrt{3},\ 1\right)$，D$\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ とおくと



$$\begin{aligned}
&\int_{-\sqrt{3}}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx \\
&= (\triangle\text{OCD の面積}) + (\text{扇形 OBC の面積}) + (\triangle\text{OAB の面積}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} \\
&= \pi+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

である．