(i) 次の等式が x についての恒等式となるように定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めなさい．

$$\frac{4x^2-9x+6}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

(ii) 定積分 $\displaystyle\int_3^4 \frac{4x^2-9x+6}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$ を計算しなさい．

(23 福島大 人間発達文化 2(1))

【答】

(1) $(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 4)$

(2) $\log 12e^2$

【解答】

(i)
$$\frac{4x^2-9x+6}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

① の右辺を整理すると

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{a(x-2)^2+b(x-1)(x-2)+c(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}\\&=\frac{(a+b)x^2+(-4a-3b+c)x+(4a+2b-c)}{(x-1)(x-2)^2}\end{aligned}$$

① の辺々の分子を比較すると

$$\begin{cases}a+b=4\\-4a-3b+c=-9\\4a+2b-c=6\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a+b=4\\-4a-3b+c=-9\\-b=-3 \quad (\because\ \text{第 2 式，第 3 式の辺々を加えた})\end{cases}$$

$$\therefore\quad (a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 4)$$

である．

- ① の辺々の分子を比較し

$$4x^2-9x+6=a(x-2)^2+b(x-1)(x-2)+c(x-1)$$

が恒等式となるように $a,\ b,\ c$ の値を定める．辺々2 次式であるから，異なる 3 つの値を代入しても等号が成り立つような $a,\ b,\ c$ を求めればよい．

$x=1$ を代入して，$4-9+6=a \qquad \therefore\quad a=1$

$x=2$ を代入して，$16-18+6=c \qquad \therefore\quad c=4$

$x=0$ を代入して，$6=4a+2b-c \qquad \therefore\quad b=\dfrac{1}{2}(6-4+4)=3$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 4)$ である．

(ii) (i) の結果より

$$\begin{aligned}&\int_3^4 \frac{4x^2-9x+6}{(x-1)(x-2)^2}\,dx\\&=\int_3^4\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right\}dx\\&=\left[\log|x-1|+3\log|x-2|-\frac{4}{x-2}\right]_3^4\\&=\log 3+3\log 2-2-\log 2+4\\&=\log 3+2\log 2+2\\&=\boldsymbol{\log 12e^2}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．