$f(x)=\dfrac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\boxed{\text{ト}}$ である

から，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である．

(23 藤田医大 医 1(7))

【答】

ト	ナニ
0	12

【解答】

$$f(x)=\frac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}$$

$t=\dfrac{\pi}{6}-x$ とおくと

$$dt=-dx \qquad \begin{array}{c|ccc} s & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{6} \\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}f(t)\cdot(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

である．したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\sin 3\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos 3x$$
$$\cos 3\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x$$

であるから

$$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}$$

であり

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}+\frac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}=1$$

である．辺々を積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{6} \quad (\because ①)$$
$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{\mathbf{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．