実数 x の区間 $a \leqq x \leqq b$ (ただし $0 < a < b$) で正の値をとる微分可能な関数 $f(x)$ に対して，微分可能な逆関数 $g(x)$ が存在するとき，定積分 S_1，S_2 を次式で定義する．

$$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$$

次の問いに答えよ．

(1) $S_1 + S_2$ を a，b，$f(a)$，$f(b)$ で表せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1}\,dx$ を求めよ．

(23 藤田医大 医 2)

【答】

(1) $S_1 + S_2 = bf(b) - af(a)$

(2) $\displaystyle\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \frac{3424}{15}$

(3) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1}\,dx = \frac{2}{3}\pi$

【解答】

(1) $g(x) = f^{-1}(x)$ より $y = g(x)$ とおくと

$$y = f^{-1}(x) \qquad \therefore \quad x = f(y)$$

このとき

$$dx = f'(y)\,dy$$

x	$f(a)$	$\longrightarrow$	$f(b)$
y	a	$\longrightarrow$	b

であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b y \cdot f'(y)\,dy \\ &= \Big[y \cdot f(y)\Big]_a^b - \int_a^b 1 \cdot f(y)\,dy \\ &= bf(b) - af(a) - S_1 \end{aligned}$$

である．式を整理すると

$$S_1 + S_2 = \boldsymbol{bf(b) - af(a)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(2) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ とおく．$f(x)$ は $x \geqq 0$ において正の値をとる微分可能な関数である．また，$f(x)$ は単調増加であるから，逆関数 $g(x)$ をもつ．$y = \sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ のとき

$$y^2 = \sqrt{1+x} - 1$$

$$(y^2+1)^2 = 1 + x \qquad \therefore \quad x = y^4 + 2y^2$$

したがって，$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ は $g(x) = x^4 + 2x^2$ である．

$$f(3) = \sqrt{\sqrt{1+3} - 1} = 1,$$
$$f(99) = \sqrt{\sqrt{1+99} - 1} = 3$$

であるから，(1) より

$$\int_3^{99} f(x)\,dx + \int_1^3 (x^4 + 2x^2)\,dx = 99 \cdot 3 - 3 \cdot 1$$
$$\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x} - 1}\,dx + \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_1^3 = 294$$

であり

$$\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x} - 1}\,dx = 294 - \left(\frac{243-1}{5} + \frac{54-2}{3}\right)$$
$$= 294 - \frac{726+260}{15} = \frac{4410-986}{15} = \boldsymbol{\frac{3424}{15}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{x} - 1}$ とおく．$f(x)$ は $x > 0$ において正の値をとる微分可能な関数である．また，$f(x)$ は単調減少であるから，逆関数 $g(x)$ をもつ．$y = \sqrt{\dfrac{4}{x} - 1}$ のとき

$$y^2 = \frac{4}{x} - 1 \qquad \therefore \quad y^2 + 1 = \frac{4}{x} \qquad \therefore \quad x = \frac{4}{y^2+1}$$

したがって，$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ は $g(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ である．

$$f(1) = \sqrt{\frac{4}{1} - 1} = \sqrt{3},$$
$$f(3) = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから，(1) より

$$\int_1^3 f(x)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1}\,dx = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \cdot \sqrt{3}$$
$$\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x} - 1}\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1}\,dx = 0$$
$$\therefore \quad \int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x} - 1}\,dx = 4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$x = \tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & \frac{1}{\sqrt{3}} & \longrightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

よって

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x} - 1}\,dx = 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．