a, b を定数とする．すべての実数 x で連続な関数 $f(x)$ について，等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．また，定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}dx$ を求めよ．

(23 長崎大 医・工・歯・教育・薬・情報 3(3))

【答】 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}dx = \frac{1}{2}$

【解答】

$t = a+b-x$ とおくと

$$dt = -dx \qquad \begin{array}{c|ccc} x & a & \longrightarrow & b \\ \hline t & b & \longrightarrow & a \end{array}$$

であるから

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)(-1)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

よって

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \qquad \cdots\cdots (*)$$

は成り立つ． ……(証明終わり)

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$ とおくと，これはすべての実数 x で連続な関数なので，等式 $(*)$ を用いると

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 f(3-x)\,dx = \int_1^2 \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{(3-x)^2+x^2-x^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx \\ &= \int_1^2 dx - \int_1^2 f(x)dx \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 dx = \Big[t\Big]_1^2 = 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2} = \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 直接計算してみる．

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2x^2-6x+9}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3x-\frac{9}{2}}{2x^2-6x+9}\right)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left\{\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}(4x-6)}{2x^2-6x+9}\right\}dx = \int_1^2 \left\{\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}(2x^2-6x+9)'}{2x^2-6x+9}\right\}dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\log|2x^2-6x+9|\right]_1^2 \\ &= \frac{2-1}{2} + \frac{3}{4}\{\log(8-12+9) - \log(2-6+9)\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\{\log 5 - \log 5\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$