次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

が成り立つことを，加法定理と 2 倍角の公式を用いて示せ．

(2) 実数 θ を，$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ と $\cos 3\theta = -\dfrac{11}{16}$ を同時に満たすものとする．このとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) (2) の θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^\theta \sin^5 x\,dx$ を求めよ．

(23 高知大 医・理工 4)

【答】

(1) 略

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^\theta \sin^5 x\,dx = \frac{1503}{5120}$

【解答】

(1) 加法定理と 2 倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x\\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

……(証明終わり)

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x)\\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x\\ &= -3\cos x + 4\cos^3 x\end{aligned}$$

……(証明終わり)

が成り立つ．

(2) (1) より

$$\cos 3\theta = -\frac{11}{16}$$
$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{11}{16} = 0$$
$$4^3\cos^3\theta - 3\cdot 4^2\cos\theta + 11 = 0$$
$$(4\cos\theta - 1)(16\cos^2\theta - 4\cos\theta - 11) = 0$$
$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{1}{4},\ \frac{-1\pm 3\sqrt{5}}{8}$$

$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{1}{2} > \cos\theta > 0$ であるから，$\cos\theta$ の値は

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{4}}$$

……(答)

である．

(3) (2) の θ に対して

$$\int_0^\theta \sin^5 x\,dx = \int_0^\theta (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$t=\cos x$ とおくと

$$dt = -\sin x\,dx \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \theta \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{4} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \sin^5 x\,dx &= \int_1^{\frac{1}{4}} (1-t^2)^2(-1)\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 (t^4-2t^2+1)\,dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4^5}\right)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^3}\right)+1-\frac{1}{4} \\ &= \frac{1023}{5\cdot 2^{10}}-\frac{2\cdot 63}{3\cdot 2^6}+\frac{3}{2^2} \\ &= \frac{1023-3360+3840}{5\cdot 2^{10}} \\ &= \mathbf{\frac{1503}{5120}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

が成立する.