負でない整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正の実数 $x>0$ に対し，

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $I_0,\ I_1$ を求めよ．
(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．
(3) $I_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ．

(23 鳥取大 医 (生命・保健)・工 4)

【答】
(1) $I_0=1-e^{-x}$，$I_1=1-(x+1)e^{-x}$
(2) $I_n=I_{n-1}-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$
(3) $I_n=1-e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad (n\geqq 1)$

【解答】

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

(1) $n=0$ のとき

$$I_0=\frac{1}{0!}\int_0^x e^{-t}\,dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^x=\boldsymbol{1-e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．$n=1$ のときは部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{1}{1!}\int_0^x te^{-t}\,dt\\
&=\Big[t\cdot(-e^{-t})\Big]_0^x-\int_0^x 1\cdot(-e^{-t})\,dt\\
&=-xe^{-x}+\Big[-e^{-t}\Big]_0^x\\
&=-xe^{-x}-e^{-x}+1\\
&=\boldsymbol{1-(x+1)e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt\\
&=\frac{1}{n!}\left\{\Big[t^n\cdot(-e^{-t})\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}\cdot(-e^{-t})\,dt\right\}\\
&=\frac{1}{n!}\left(-x^n e^{-x}+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt\right)\\
&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt
\end{aligned}$$

よって，I_n と I_{n-1} の関係式は

$$\boldsymbol{I_n=I_{n-1}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $n \geqq 1$ のとき，(2) の結果式より

$$\begin{aligned} I_n &= I_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{x^k}{k!} e^{-x} \right) \\ &= 1 - e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-x} \frac{x^0}{0!} - e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

$n = 0$ のときも成立する．

よって

$$\boldsymbol{I_n = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．