負でない整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正の実数 $x>0$ に対し，

$$I_n=\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $I_0,\ I_1$ を求めよ．
(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$I_n$ と $I_{n-1}$ の関係式を求めよ．
(3) $I_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ．

(23 鳥取大 医 (医) 4)

---

【答】

(1) $I_0=1-e^{-x}$，$I_1=1-(x+1)e^{-x}$
(2) $I_n=nI_{n-1}-x^n e^{-x}$
(3) $I_n=n!\left(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right)\quad(n\geqq 0)$

---

【解答】

$$I_n=\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

(1) $n=0$ のとき

$$I_0=\int_0^x e^{-t}\,dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^x=\boldsymbol{1-e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．$n=1$ のときは部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^x te^{-t}\,dt\\&=\Big[t\cdot(-e^{-t})\Big]_0^x-\int_0^x 1\cdot(-e^{-t})\,dt\\&=-xe^{-x}+\Big[-e^{-t}\Big]_0^x\\&=-xe^{-x}-e^{-x}+1\\&=\boldsymbol{1-(x+1)e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^x t^n e^{-t}\,dt\\&=\Big[t^n\cdot(-e^{-t})\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}\cdot(-e^{-t})\,dt\\&=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}\end{aligned}$$

よって，$I_n$ と $I_{n-1}$ の関係式は

$$\boldsymbol{I_n=nI_{n-1}-x^n e^{-x}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) の結果式の辺々を $n!$ で割ると

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} - e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{I_n}{n!} &= \frac{I_0}{0!} + \sum_{k=1}^{n}\left(-e^{-x}\frac{x^k}{k!}\right) \\
&= 1 - e^{-x} - e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \\
&= 1 - e^{-x}\frac{x^0}{0!} - e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \\
&= 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

$n = 0$ のときも成立する.

よって

$$\boldsymbol{I_n = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)} \quad (n \geqq 0) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.