等式 $f(x)=\sin 2x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(23 山梨大 工 1(3))

【答】 $f(x)=\sin 2x+\dfrac{2\pi}{8-\pi^2}$

【解答】

$$f(x)=\sin 2x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$ は定数であるから，$k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$ とおくことができる．このとき

$$f(x)=\sin 2x+k$$

であるから

$$\begin{aligned}
k&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin 2t+k)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t\sin 2t+kt)\,dt\\
&=\left[t\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\,dt+\left[k\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{k\pi^2}{8}\\
&=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

式を整理すると

$$\left(1-\frac{\pi^2}{8}\right)k=\frac{\pi}{4}\qquad\therefore\quad k=\frac{2\pi}{8-\pi^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=\sin 2x+\frac{2\pi}{8-\pi^2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．