0 以上の整数 $n$ に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x, \quad f_{n+2}(x)=2xf_{n+1}(x)-f_n(x)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める．

(1) 0 以上の整数 $n$ と任意の実数 $\theta$ に対し，等式 $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つことを示せ．

(2) 自然数 $p,\ q$ に対し，$I_{p,\,q}=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{3p}{}'(x)f_{3q}{}'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ．ただし，$f_n{}'(x)$ は $f_n(x)$ の導関数である．

(23 山梨大 後 医 5)

---

【答】

(1) 略

(2) $I_{p,\,q}=\begin{cases}\dfrac{3p^2\pi}{2} & (p=q\text{ のとき}) \\ 0 & (p\fallingdotseq q\text{ のとき})\end{cases}$

---

【解答】

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x,$$
$$f_{n+2}(x)=2xf_{n+1}(x)-f_n(x)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) 0 以上の整数 $n$ と任意の実数 $\theta$ に対し，等式

$$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを整数 $n$ についての数学的帰納法で示す．

(i) $n=0,\ 1$ のとき

$$f_0(\cos\theta)=1=\cos(0\cdot\theta)$$
$$f_1(\cos\theta)=\cos\theta=\cos(1\cdot\theta)$$

であり，$n=0,\ 1$ のとき，任意の $\theta$ に対し $(*)$ が成り立つ．

(ii) $n=k,\ k+1$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} f_{k+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta f_{k+1}(\cos\theta)-f_k(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta \quad (\because\ \text{帰納法の仮定}) \\ &= \cos\{(k+1)\theta+\theta\}+\cos\{(k+1)\theta-\theta\}-\cos k\theta \\ &\qquad (\because\ \text{積を和に直す公式}) \\ &= \cos(k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta \\ &= \cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

である．$n=k+2$ のときも任意の実数 $\theta$ に対し $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より 0 以上のすべての整数 $n$ と任意の $\theta$ に対して $(*)$ が成り立つ．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) 自然数 $p,\ q$ に対し

$$I_{p,\,q}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{3p}{}'(x)f_{3q}{}'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\cos\theta\ \left(\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}\right)$ とおくと

$$dx=-\sin\theta\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & \frac{2\pi}{3} & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} I_{p,\,q} &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f_{3p}{}'(\cos\theta) f_{3q}{}'(\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f_{3p}{}'(\cos\theta) f_{3q}{}'(\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$f_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ の辺々を $\theta$ で微分すると

$$f_n{}'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) = -n\sin n\theta \qquad \therefore\quad f_n{}'(\cos\theta) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

であるから

$$\begin{aligned} I_{p,\,q} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{3p\sin 3p\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{3q\sin 3q\theta}{\sin\theta}\cdot\sin^2\theta\,d\theta \\ &= 9pq\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3p\theta\cdot\sin 3q\theta\,d\theta \\ &= \frac{9pq}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \{\cos(3p\theta-3q\theta)-\cos(3p\theta+3q\theta)\}\,d\theta \quad (\because\ \text{積を差に直す公式}) \\ &= \frac{9pq}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \{\cos 3(p-q)\theta-\cos 3(p+q)\theta\}\,d\theta \end{aligned}$$

となる.

(i) $p=q$ の場合

$$\begin{aligned} I_{p,\,q} &= \frac{9p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos 6p\theta)\,d\theta \\ &= \frac{9p^2}{2}\left[\theta-\frac{\sin 6p\theta}{6p}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{9p^2}{2}\left\{\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{6p}(\sin 4p\pi-\sin 2p\pi)\right\} \\ &= \frac{9p^2}{2}\cdot\frac{\pi}{3} \quad (\because\ p\ \text{は自然数}) \\ &= \frac{3p^2\pi}{2} \end{aligned}$$

(ii) $p \neq q$ の場合

$$\begin{aligned} I_{p,\,q} &= \frac{9pq}{2}\left[\frac{\sin 3(p-q)\theta}{3(p-q)}-\frac{\sin 3(p+q)\theta}{3(p+q)}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{9pq}{2}\left\{\frac{\sin 2(p-q)\pi-\sin(p-q)\pi}{3(p-q)}-\frac{\sin 2(p+q)\pi-\sin(p+q)\pi}{3(p+q)}\right\} \\ &= 0 \quad (\because\ p\pm q\ \text{は}\ 0\ \text{でない整数}) \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{I_{p,\,q} = \begin{cases} \dfrac{3p^2\pi}{2} & (p=q\ \text{のとき}) \\ 0 & (p\neq q\ \text{のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.