関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\log 2}|x-e^t|\,dt$$

と定める．ただし，対数は自然対数とし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．
(2) $0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

(23 弘前大 理工 8)

【答】
(1) $f(1)=1-\log 2$
(2) $3-2\sqrt{2}$

【解答】

$$f(x)=\int_0^{\log 2}|x-e^t|\,dt$$

(1) 積分区間は $0\leqq t\leqq \log 2$ であり，$1\leqq e^t\leqq 2$ であるから

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^{\log 2}|1-e^t|\,dt=\int_0^{\log 2}(e^t-1)\,dt\\&=\Big[e^t-t\Big]_0^{\log 2}=(2-\log 2)-1\\&=\mathbf{1-\log 2}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) 積分区間は $0\leqq t\leqq \log 2$ であり，e^t は $1\leqq e^t\leqq 2$ を満たす．
$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$x\leqq 1\leqq e^t$ であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\log 2}(e^t-x)\,dt=\Big[e^t-xt\Big]_0^{\log 2}\\&=(2-x\log 2)-1\\&=-x\log 2+1\end{aligned}$$

である．この範囲で $f(x)$ は減少関数だから，最小値は $1\leqq x\leqq 2$ の範囲で考えればよい．
$1\leqq x\leqq 2$ のとき，$x-e^t$ は $t=\log x$ で符号を正から負に変えるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\log x}(x-e^t)\,dt+\int_{\log x}^{\log 2}(e^t-x)\,dt\\&=\Big[xt-e^t\Big]_0^{\log x}-\Big[xt-e^t\Big]_{\log x}^{\log 2}\\&=2(x\log x-x)+1-(x\log 2-2)\\&=2x\log x-(2+\log 2)x+3\end{aligned}$$

である．微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}-(2+\log 2)\\&=2\log x-\log 2\\&=2(\log x-\log\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{2}$ のときに極小かつ最小となるから，最小値は

$$\begin{aligned}f(\sqrt{2})&=2\sqrt{2}\log\sqrt{2}-(2+\log 2)\sqrt{2}+3\\&=\mathbf{3-2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

……(答)

である．