$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とし，$f(x)=F(3x)-F(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ の範囲で，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(23 琉球大 後 理 (数理) 2)

【答】

(1) $f'(x)=\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)}$

(2) $\dfrac{\pi}{6}$

【解答】

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

(1) $f(x)=F(3x)-F(x)$ より

$$f'(x)=3F'(3x)-F'(x)$$

$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ なので

$$f'(x)=\frac{3}{1+(3x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{3(1+x^2)-(1+9x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)}$$

$$=\frac{2-6x^2}{(1+9x^2)(1+x^2)}=\boldsymbol{\frac{2(1-3x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $x \geqq 0$ の範囲での $f(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となり，最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=F\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

である．ここで，$t=\tan\theta$ とおくと

$$dt=\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \begin{array}{c|ccc} t & \frac{1}{\sqrt{3}} & \longrightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であり

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．