n を自然数とし，定積分 I_n を

$$I_n = \int_1^n \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ のとき，$x+1 \leqq x^2+1 \leqq 2x^2$ であることを用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leqq I_n \leqq \log\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

(2) $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．さらに，定積分 I_n を求めよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(23 公立はこだて未来大 シス情 6)

【答】

(1) 略

(2) $a=1$，$b=-1$，$c=0$，$I_n = \log\dfrac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+1}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{2}\log 2$

【解答】

(1) $x \geqq 1$ のとき，$1 \leqq x \leqq x^2$ が成り立ち

$$x+1 \leqq x^2+1 \leqq 2x^2$$

が成り立つ．したがって

$$x(x+1) \leqq x(x^2+1) \leqq 2x^3$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2x^3} \leqq \frac{1}{x(x^2+1)} \leqq \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore\quad \int_1^n \frac{1}{2x^3}\,dx \leqq \int_1^n \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx \leqq \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

が成り立つ．ここで

$$\int_1^n \frac{1}{2x^3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2x^2}\right]_1^n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx &= \int_1^n \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \Big[\log|x| - \log|1+x|\Big]_1^n \\ &= \log n - \log(n+1) + \log 2 = \log\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leqq I_n \leqq \log\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

(2) $$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

右辺を通分すると

$$(\text{右辺}) = \frac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

左辺と分子を比較すると

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．したがって

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \Big[\log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1|\Big]_1^n \\ &= \log n - \frac{1}{2}\log(n^2+1) + \frac{1}{2}\log 2 \\ &= \boldsymbol{\log \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+1}}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．