以下の問いに答えよ．

(1) 次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=1$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．正の整数 n に対して，部分積分を用いて次の式が成り立つことを示せ．

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}+\frac{1}{4\sqrt{2}\,n(n+1)}+\frac{3}{4n(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

(3) 設問 (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ を用いて

$$b_n=\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}a_m\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(23 東北大 後 理 6)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$

【解答】

(1) $1\leqq m\leqq x\leqq m+1$ において，$y=\dfrac{1}{x}$ は減少関数であるから

$$\frac{1}{m+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{m}$$

が成り立つ．積分すると

$$\int_m^{m+1}\frac{1}{m+1}\,dx\leqq\int_m^{m+1}\frac{1}{x}\,dx\leqq\int_m^{m+1}\frac{1}{m}\,dx$$

$$\frac{1}{m+1}\leqq\int_m^{m+1}\frac{1}{x}\,dx\leqq\frac{1}{m}$$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ として和をとると

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m+1}\leqq\sum_{m=1}^{n-1}\int_m^{m+1}\frac{1}{x}\,dx\leqq\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqq\int_1^n\frac{1}{x}\,dx\leqq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

が成り立つ．ここで

$$\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$$

であるから

$$-1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\leqq\log n\leqq\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}+\log n\leqq\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\leqq 1+\log n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n\log n}+1\leqq\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\leqq\frac{1}{\log n}+1$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\log n}+1\right)=0+1=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)=0+1=1$$

であり，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=1$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(2) 部分積分法により

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\,dx\\
&=\left[\frac{x^n}{n}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n}\cdot\left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\right\}dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}+\frac{1}{2n}\int_0^1 x^n(x+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}+\frac{1}{2n}\left\{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot(x+1)^{-\frac{3}{2}}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\left\{-\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}}\right\}dx\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}+\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}\,(n+1)}+\frac{3}{2(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}+\frac{1}{4\sqrt{2}\,n(n+1)}+\frac{3}{4n(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}a_m\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}+\frac{1}{4\sqrt{2}\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\\
&\qquad+\frac{3}{4\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\int_0^1\frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx
\end{aligned}$$

である．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(\because\ (1))$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{2}\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{2}\log n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{2}\log n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

である．また，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$0 \leqq x^{m+1} \leqq 1 \leqq (x+1)^{\frac{5}{2}}$$
$$0 \leqq \frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} \leqq 1$$

が成り立つので

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx \leqq 1$$
$$\therefore \quad 0 \leqq \frac{1}{m(m+1)} \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx \leqq \frac{1}{m(m+1)} \quad (m = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である．よって

$$0 \leqq \frac{3}{4\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} dx \leqq \frac{3}{4\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)}$$

が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\log n} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = 0$$

なので，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} dx = 0$$

である．

以上から，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．