以下の問いに答えよ．必要ならば，正の数 a に対し，$a > \log(a+1)$ であることを用いてよい．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n\log n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\{\log n-\log(n+1)\}}{\log n}$ を求めよ．

(2) 関数 $y = x\log(x+1)-(x+1)\log x\,(x>1)$ について，常に $y'<0$ であることを示せ．さらに y'' の符号と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$ を調べて，この関数のグラフをかけ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx$, $\displaystyle\int (x+1)\log x\,dx$ を求めよ．

(4) n を 4 以上の自然数とし，曲線 $y = x\log(x+1)-(x+1)\log x$ と x 軸，および 2 直線 $x=3$, $x=n$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ．

(23 三重大 医 3)

【答】

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n\log n}=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\{\log n-\log(n+1)\}}{\log n}=0$

(2) 略

(3) $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C_1$ （C_1は積分定数),

$\displaystyle\int (x+1)\log x\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\log x-\frac{1}{4}x^2-x+C_2$ （C_2は積分定数)

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}=1$

【解答】

(1) $a>0$ に対し，$a>\log(a+1)$ であることを用いる．$n>1$ に対し

$$0<\frac{\log(n+1)}{n\log n}<\frac{n}{n\log n}=\frac{1}{\log n}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}0$$

である．はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n\log n}=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n\{\log n-\log(n+1)\}}{\log n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{-n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-1}{\log n}\cdot\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right\}\\ &=0\cdot 1\\ &=\mathbf{0}\quad\left(\because\ \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $$y = x\log(x+1) - (x+1)\log x \ (x > 1)$$

微分すると

$$\begin{aligned}
y' &= 1\cdot\log(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1} - 1\cdot\log x - (x+1)\cdot\frac{1}{x} \\
&= \log(x+1) - \log x + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\
&= \log\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \\
&< \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \quad (\because\ a > 0 \text{ のとき } a > \log(1+a)) \\
&= -\frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

となるから，$x > 1$ のとき $y' < 0$ である． ……(証明終わり)

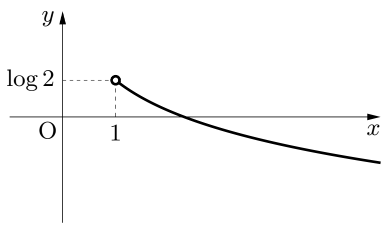
さらに，微分して

$$\begin{aligned}
y'' &= \left\{\log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right\}' \\
&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{(x+1)x^2 - (x+1)^2 x + x^2 + (x+1)^2}{(x+1)^2 x^2} \\
&= \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2 x^2} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{(x+1)^2 x^2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y &= \lim_{x\to\infty}\left(x\log\frac{x+1}{x} - \log x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \log x\right\} \\
&= 1 - \infty \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

であり，この関数のグラフは右のようになる．



(3) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
&\int x\log(x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \int \frac{1}{2}(x^2-1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \quad (\because\ \text{計算の工夫}) \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C_1} \quad (\boldsymbol{C_1}\textbf{は積分定数})
\end{aligned}$$

……(答)

であり

$$\begin{aligned}
&\int (x+1)\log x\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \int\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \int\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\,dx \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \frac{1}{4}x^2 - x + C_2} \quad (\boldsymbol{C_2}\textbf{は積分定数})
\end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) $x=3$ のとき

$$y=3\log 4-4\log 3=\log 4^3-\log 3^4=\log 64-\log 81<0$$

であるから，$3 \leqq x \leqq n$ において $y<0$ である．

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_3^n (-y)\,dx \\
&= -\int_3^n \{x\log(x+1)-(x+1)\log x\}\,dx \\
&= -\left[\left\{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\log x-\frac{1}{4}x^2-x\right\}\right]_3^n \\
&\qquad (\because\ (3)) \\
&= -\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\log x+\frac{3}{2}x\right]_3^n \\
&= -\left\{\frac{1}{2}(n^2-1)\log(n+1)-\left(\frac{1}{2}n^2+n\right)\log n+\frac{3}{2}n\right\}+\left(4\log 4-\frac{15}{2}\log 3+\frac{9}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}n^2\{\log n-\log(n+1)\}+\frac{1}{2}\log(n+1)+n\log n-\frac{3}{2}n+4\log 4-\frac{15}{2}\log 3+\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n\{\log n-\log(n+1)\}}{\log n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(n+1)}{n\log n}\right. \\
&\qquad\left. +1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log n}+\frac{4\log 4-\frac{15}{2}\log 3+\frac{9}{2}}{n\log n}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+1-\frac{3}{2}\cdot 0+0 \quad (\because\ (1)) \\
&= \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．