座標平面におけるサイクロイド $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問いに答えなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(1) 曲線 C 上の点 $\left(\dfrac{3}{2}\pi+1,\ 1\right)$ における接線 L_1 の方程式を求めなさい．

(2) 曲線 C の接線 L_2 が接線 L_1 と直交するとき，L_1 と L_2 の交点を求めなさい．

(3) 曲線 C と接線 L_1，L_2 のグラフをかきなさい．曲線と接線の接点の座標，および L_1 と L_2 の交点の座標を明記すること．

(4) 曲線 C と接線 L_1，L_2 で囲まれた領域の面積を求めなさい．

(23 公立千歳科技大 中期 理工 4)

【答】

(1) $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$

(2) $\left(\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+2\right)$

(3) 略

(4) $\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}-1$

【解答】

$$C:\begin{cases}x=\theta-\sin\theta\\ y=1-\cos\theta\end{cases}\quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) C 上の点 $\left(\dfrac{3}{2}\pi+1,\ 1\right)$ を与える θ の値は

$$\begin{cases}\theta-\sin\theta=\dfrac{3}{2}\pi+1\\ 1-\cos\theta=1\end{cases}$$

の解であり，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ と第 2 式より

$$\cos\theta=0 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

である．$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(\text{第 1 式の左辺})=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1 \fallingdotseq (\text{第 1 式の右辺})$$

であり，不適．

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$(\text{第 1 式の左辺})=\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+1=(\text{第 1 式の右辺})$$

であり，適する．

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

であり，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\dfrac{3}{2}\pi}{1-\cos\dfrac{3}{2}\pi}=\frac{-1}{1-0}=-1$$

である．C 上の点 $\left(\dfrac{3}{2}\pi+1,\ 1\right)$ における接線 L_1 の方程式は

$$y=-\left(x-\frac{3}{2}\pi-1\right)+1$$

$$\therefore\quad L_1: \boldsymbol{y=-x+\frac{3}{2}\pi+2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 接線 L_2 は接線 L_1 と直交するから，L_2 の傾きは 1 である．このときの接点を与える θ の値は $\dfrac{dy}{dx}=1$ より

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=1 \iff \begin{cases}\sin\theta=1-\cos\theta \\ 1-\cos\theta \fallingdotseq 0\end{cases} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$$\iff \begin{cases}\sin^2\theta=(1-\cos\theta)^2 \\ \sin\theta \geqq 0 \\ 1-\cos\theta \fallingdotseq 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}1-\cos^2\theta=1-2\cos\theta+\cos^2\theta \\ 0<\theta\leqq\pi \quad (\because\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)\end{cases}$$

第 1 式を整理すると

$$2\cos^2\theta-2\cos\theta=0$$

$$2\cos\theta(\cos\theta-1)=0$$

$0<\theta\leqq\pi$ より

$$\cos\theta=0 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

である．このとき，L_2 の接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,\ 1\right)$ であり，L_2 の方程式は

$$y=\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1$$

$$\therefore\quad L_2: y=x-\frac{\pi}{2}+2$$

である．よって，L_1 と L_2 の交点の座標は

$$\begin{cases}y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2 & \cdots\cdots ① \\ y=x-\dfrac{\pi}{2}+2 & \cdots\cdots ①\end{cases} \iff \begin{cases}①+② : 2y=\pi+4 \\ ①-② : 0=-2x+2\pi\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\left(\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 連立方程式 ㋐ は次のように解いてもよい．

$$㋐ \iff \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=1 \\ 0<\theta<2\pi \quad (\because\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \\ 0<\theta<2\pi\end{cases}$$

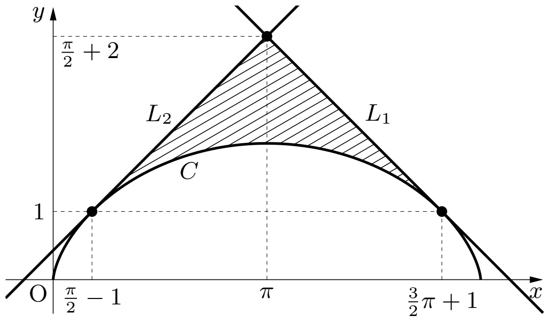
$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

である．

(3) 曲線 C の増減は下表となる．

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$+$	2	$+$	
x	0	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	2π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0
$\dfrac{dy}{dx}$		$\nearrow$	0	$\searrow$	



曲線 C と接線 L_1，L_2 のグラフは右上図の太線となる．

(4) 曲線 C と接線 L_1，L_2 で囲まれた領域は (3) の図の斜線部分である．直線 $x=\pi$ に関する対称性より，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= 2\left\{\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\right)\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)-\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi} y\,dx\right\}\\
&= \left(\frac{\pi}{2}+3\right)\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-2\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi} y\,dx\\
&= \frac{\pi^2}{4}+2\pi+3-2\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi} y\,dx
\end{aligned}
$$

ここで，末項の定積分を計算すると

$$
\begin{aligned}
2\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi} y\,dx &= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta\\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta\\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3-4\cos\theta+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= \left[3\theta-4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&= 3\pi-\left(\frac{3}{2}\pi-4+0\right)\\
&= \frac{3}{2}\pi+4
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\pi^2}{4}+2\pi+3-\left(\frac{3}{2}\pi+4\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．