座標平面上で，点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と曲線 $C : y = \log x$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を $1:2$ の比に内分する点を P とする．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ．

(2) 点 Q が曲線 C 上を動くとき，点 P の描く曲線を T とする．T の方程式を求めよ．

(3) (2) の曲線 T と曲線 C の交点の x 座標を求めよ．

(4) (2) の曲線 T と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 公立小松大 4)

【答】

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C$ （C は積分定数）

(2) $y = \dfrac{1+\log 3x}{3}$

(3) $\sqrt{3e}$

(4) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3e} + \dfrac{1}{9e} - 1$

【解答】

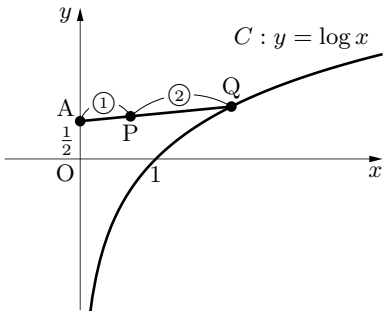
$$C : y = \log x \ (x > 0)$$

(1) 部分積分法を用いると

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{x\log x - x + C} \quad (C \text{ は積分定数}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 曲線 C 上の点 Q の座標を $(q,\ \log q)$，線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと



$$\begin{cases} x = \dfrac{q + 2\cdot 0}{3} \\ y = \dfrac{\log q + 2\cdot\dfrac{1}{2}}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} q = 3x \\ y = \dfrac{1+\log 3x}{3} \end{cases}$$

となる．よって，P の描く曲線 T の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{1+\log 3x}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 曲線 T と曲線 C の交点の x 座標は

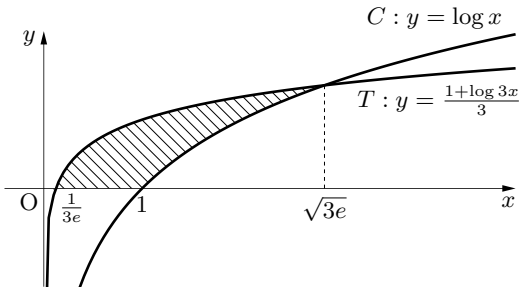
$$\frac{1+\log 3x}{3} = \log x$$
$$1 + \log 3 + \log x = 3\log x$$
$$2\log x = \log(3e)$$
$$\therefore \quad x = \boldsymbol{\sqrt{3e}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 曲線 T と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{1+\log 3x}{3}=0$$
$$\log 3x=-1$$
$$\therefore\quad 3x=e^{-1}$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{3e}$$

であり，曲線 T と曲線 C および x 軸で囲まれた図形は右図の斜線部分である．求める面積は



$$\int_{\frac{1}{3e}}^{\sqrt{3e}}\frac{1+\log 3x}{3}\,dx-\int_{1}^{\sqrt{3e}}\log x\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{3e}}^{\sqrt{3e}}\frac{1+\log 3+\log x}{3}\,dx-\int_{1}^{\sqrt{3e}}\log x\,dx$$
$$=\left[\frac{1+\log 3}{3}x+\frac{1}{3}(x\log x-x)\right]_{\frac{1}{3e}}^{\sqrt{3e}}-\Big[x\log x-x\Big]_{1}^{\sqrt{3e}}\qquad(\because\ (1))$$
$$=\left[\frac{\log 3}{3}x+\frac{1}{3}x\log x\right]_{\frac{1}{3e}}^{\sqrt{3e}}-\Big[x\log x-x\Big]_{1}^{\sqrt{3e}}$$
$$=\frac{\log 3}{3}\left(\sqrt{3e}-\frac{1}{3e}\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{3e}\log\sqrt{3e}-\frac{1}{3e}\log\frac{1}{3e}\right)$$
$$-\left\{\sqrt{3e}\log\sqrt{3e}-\sqrt{3e}-(0-1)\right\}$$
$$=\frac{\log 3}{3}\sqrt{3e}-\frac{\log 3}{9e}+\frac{\sqrt{3e}}{6}\log(3e)+\frac{1}{9e}\log(3e)-\frac{\sqrt{3e}}{2}\log(3e)+\sqrt{3e}-1$$
$$=\left\{\frac{\log 3}{3}+\frac{\log(3e)}{6}-\frac{\log(3e)}{2}+1\right\}\sqrt{3e}-\frac{\log 3-\log(3e)}{9e}-1$$
$$=\left\{\frac{\log 3}{3}-\frac{1+\log 3}{3}+1\right\}\sqrt{3e}-\frac{\log 3-(1+\log 3)}{9e}-1$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3e}+\frac{1}{9e}-1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．