関数 $f(x)=|x-1|$, $g(x)=e^{-2x+1}$ により定まる座標平面上の曲線 $y=(f\circ g)(x)$ を C とする．ただし，e は自然対数の底で $e=2.71828\cdots$ である．次の問いに答えよ．

(1) $(f\circ g)(0)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)$ を求めよ．

(2) 座標平面上に曲線 C の概形を図示せよ．

(3) $\dfrac{1}{2}<t<1$ を満たす実数 t に対し $F(t)=(f\circ g)\left(\dfrac{t}{2}\right)+(f\circ g)(t)$ と定める．$F(t)$ の増減を調べ，極値およびそのときの t の値を求めよ．

(4) 曲線 C と直線 $l:y=\dfrac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

(23 宇都宮大 地デ・工・農 3)

【答】

(1) $(f\circ g)(0)=e-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=1$

(2) 略

(3) $t=\log 2$ のとき，極大値 $\dfrac{e}{4}$

(4) $S=\dfrac{1}{4}\log\dfrac{27}{16}$

【解答】

$$f(x)=|x-1|,\quad g(x)=e^{-2x+1}$$

(1) $(f\circ g)(x)$ は

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=|e^{-2x+1}-1|$$

であるから

$$(f\circ g)(0)=|e-1|=\boldsymbol{e-1}\quad(\because\ e=2.71828\cdots)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

また

$$\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\infty}\left|e^{-2x+1}-1\right|=|0-1|=\boldsymbol{1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

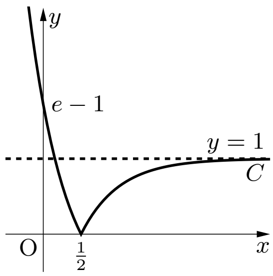
(2) $y=e^{-2x+1}-1$ は単調減少な関数である．

$e^{-2x+1}-1\geqq 0$ を満たすのは

$$e^{-2x+1}\geqq 1$$

$$\therefore\quad -2x+1\geqq 0\qquad\therefore\quad x\leqq\frac{1}{2}$$

のときであり，(1) の結果とあわせると，$C:y=(f\circ g)(x)$ のグラフは右図となる．



(3) $\dfrac{1}{2}<t<1$ のとき，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{t}{2}<\dfrac{1}{2}$ である．

$e^{-2x+1}-1$ の符号に注意すると

$$\begin{aligned}F(t)&=(f\circ g)\left(\frac{t}{2}\right)+(f\circ g)(t)\\&=\left(e^{-2\cdot\frac{t}{2}+1}-1\right)-\left(e^{-2t+1}-1\right)\\&=e^{-t+1}-e^{-2t+1}\end{aligned}$$

となる．微分すると

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{-t+1}(-1) - e^{-2t+1}(-2) \\ &= \frac{-1}{e^{t-1}} + \frac{2}{e^{2t-1}} \\ &= \frac{-e^t+2}{e^{2t-1}} \end{aligned}$$

$F'(t)$ は $-e^t+2=0$，すなわち $t=\log 2$ で符号を変える．$e=2.71828\cdots$ より

$$e < 4 < e^2$$

$$\therefore \quad 1 < \log 2^2 < 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} < \log 2 < 1$$

であるから，$F(t)$ の増減は右表となる．

t	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	(1)
$F'(t)$		$+$	0	$-$	
$F(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$F(\log 2) = \frac{e}{e^{\log 2}} - \frac{e}{(e^{\log 2})^2} = \frac{e}{2} - \frac{e}{2^2} = \frac{e}{4}$$

である．よって，$F(t)$ $\left(\frac{1}{2} < t < 1\right)$ は

$t=\log 2$ のとき，極大値 $\boldsymbol{\frac{e}{4}}$ ……（答）

をとる．

(4) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}$ を解く．

(i) $x \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$e^{-2x+1}-1=\frac{1}{2}$ を満たす x を α とおくと

$$e^{-2\alpha+1} = \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad -2\alpha+1 = \log\frac{3}{2}$$

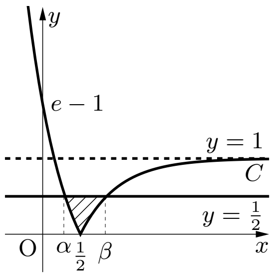
$$\therefore \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)$$

(ii) $x \geqq \frac{1}{2}$ のとき

$-e^{-2x+1}+1=\frac{1}{2}$ を満たす x を β とおくと

$$e^{-2\beta+1} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad -2\beta+1 = \log\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{1}{2}\left(1-\log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\log 2)$$



C と $l: y=\frac{1}{2}$ で囲まれる部分は，右図の斜線部分であり，この面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(\beta-\alpha) - \left\{ \int_\alpha^{\frac{1}{2}} (e^{-2x+1}-1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} (1-e^{-2x+1})\,dx \right\}$$

と表せる．ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\beta-\alpha) &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{2}(1+\log 2) - \frac{1}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\log 2 + \log\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{\log 3}{4} \end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} (e^{-2x+1} - 1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} (1 - e^{-2x+1})\, dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} (1 - e^{-2x+1})\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} (1 - e^{-2x+1})\, dx \\
&= \left[x + \frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{\alpha} + \left[x + \frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{\beta} \\
&= \alpha + \beta + \frac{1}{2} \left(e^{-2\alpha+1} + e^{-2\beta+1} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{0} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 - \log \frac{3}{2} + \log 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) - 2 \\
&= \frac{1}{2} (2 - \log 3 + 2 \log 2) - 1 \\
&= \log 2 - \frac{\log 3}{2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\log 3}{4} - \left(\log 2 - \frac{\log 3}{2} \right) \\
&= \frac{3 \log 3 - 4 \log 2}{4} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4} \log \frac{27}{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.