e を自然対数の底として，$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$ $(x \geqq 0)$ を考える．次の問いに答えよ．ただし，正の整数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-\frac{x}{2}}=0$ であることは用いてよい．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べ，グラフをかけ．また，変曲点が 2 つ以上あれば，それらの y 座標の大小関係も調べよ．ただし，$2<e<3$ であることを用いてもよい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) a を正の実数とする．xy 平面において，$0 \leqq y \leqq f(x)$, $0 \leqq x \leqq a$ を満たす部分の面積を $S(a)$ とするとき，$S(a)$ を a の式で表せ．

(4) (3) の $S(a)$ に対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

(23 富山大 理・医・薬 2)

【答】

(1) 略

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx=-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}}+C$ (C は積分定数)

(3) $S(a)=16-2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}}$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)=16$

【解答】

$$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}\ (x \geqq 0)$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2x\cdot e^{-\frac{x}{2}}+x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\\
f''(x)&=\frac{1}{2}(4-2x)e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(4x-x^2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}(x^2-8x+8)e^{-\frac{x}{2}}\\
&=\frac{1}{4}\{x-(4-2\sqrt{2})\}\{x-(4+2\sqrt{2})\}e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ の増減および凹凸は次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$4-2\sqrt{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	α	↗	$16e^{-2}$	↘	β	↘

ただし，α, β は

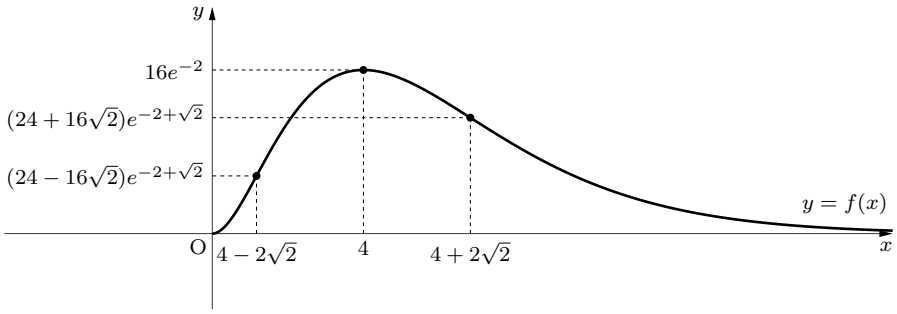
$$\alpha=f(4-2\sqrt{2})=(24-16\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$\beta=f(4+2\sqrt{2})=(24+16\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$$

である．

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{(24+16\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}}{(24-16\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}}=\frac{(3+2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}}\\
&=\frac{17+12\sqrt{2}}{e^{2\sqrt{2}}}>\frac{17+12}{e^3}>\frac{29}{3^3}=\frac{29}{27}>1\quad(\because\ 2<e<3)
\end{aligned}$$

したがって，$\alpha < \beta$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} = 0$ であることにも注意すると，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= x^2\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int 2x\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}})\,dx\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} + 4\left\{x\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int 1\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}})\,dx\right\}\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} + 8\int e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} - 16e^{-\frac{x}{2}} + C \quad (C \text{ は積分定数})\\ &= \boldsymbol{-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}} + C} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) $S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ である．(2) より

$$\begin{aligned}S(a) &= \Big[-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^a\\ &= \boldsymbol{16 - 2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^n e^{-\frac{a}{2}} = 0$ (n は正の整数) であるから

$$\lim_{a\to\infty}(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}} = \lim_{a\to\infty}\left(a^2e^{-\frac{a}{2}} + 4ae^{-\frac{a}{2}} + 8e^{-\frac{a}{2}}\right) = 0$$

であり，(3) の結果より

$$\lim_{a\to\infty} S(a) = \boldsymbol{16} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．