関数 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(23 山梨大 工 3)

---

【答】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

(2) 略

(3) $\dfrac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

---

【解答】

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+1}$$

(1) $f(x)$ は偶関数であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$ であり

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めると

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

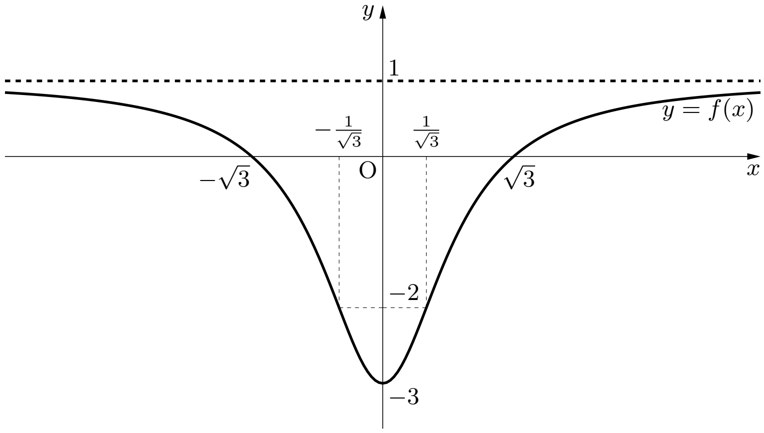
$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{8\cdot(x^2+1)^2-8\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}\\&=\frac{8(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}\\&=\frac{-24}{(x^2+1)^3}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

であり，$y=f(x)$ の増減，凹凸は下表となる．

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ |

極小値 : $f(0)=-3$,　変曲点 : $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -2\right)$

であり，(1) の結果とあわせると，$y=f(x)$ のグラフは次図となる．




(3) 求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \{-f(x)\}\,dx \quad (\because\ f(x) \text{ は偶関数}) \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(-1+\frac{4}{x^2+1}\right) dx \\
&= -2\Big[x\Big]_0^{\sqrt{3}} + 8\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= -2\sqrt{3} + 8\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であり

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

である．よって

$$\boldsymbol{S = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．