次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$$y = \cos 2x + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$$

(23 岩手大 理工 4(2))

【答】 $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$

【解答】

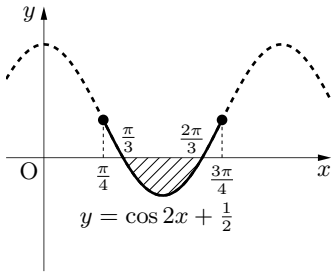
$$y = \cos 2x + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

① と x 軸の共有点の x 座標は

$$\cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \qquad \therefore \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \frac{3}{2}\pi$ であるから

$$2x = \pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad \therefore \quad x = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$$



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= -\left[\frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．