$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ を考える．曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数と第 2 次導関数を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(23 弘前大 教育・医・理工 5)

【答】

(1) $f'(x)=-\dfrac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$，$f''(x)=\dfrac{3}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$

(2) $\ell: y=-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(x-5)$

(3) $\dfrac{23\sqrt{2}}{16}-2$

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ (x>-1)$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=\boldsymbol{-\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}=\boldsymbol{\frac{3}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=-\frac{1}{4\sqrt{2}}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \ell: \boldsymbol{y=-\frac{1}{4\sqrt{2}}(x-5)} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (1) から，曲線 C は下に凸であり，接線 ℓ は曲線 C の下側にある．

接線 ℓ と y 軸との交点の座標は $\left(0,\ \dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)$ であるから，与えられた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &=\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^1-\frac{9}{8\sqrt{2}}\\ &=2\sqrt{2}-2-\frac{9\sqrt{2}}{16}\\ &=\boldsymbol{\frac{23\sqrt{2}}{16}-2} \quad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．