$f(x)=(1-x^2)e^{\frac{4}{3}x}$ について，以下の問いに答えよ．

(i) $f'(x)$ を求めよ．

(ii) $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，変曲点を求めなくてよい．

(iii) $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(23 東北学院大 工・情報 B 4)

---

【答】

(i) $f'(x)=\left(\dfrac{4}{3}-2x-\dfrac{4}{3}x^2\right)e^{\frac{4}{3}x}$

(ii) 略

(iii) $\dfrac{9}{32}(e^{\frac{4}{3}}+7e^{-\frac{4}{3}})$

---

【解答】

$$f(x)=(1-x^2)e^{\frac{4}{3}x}$$

(i) 微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=(-2x)\cdot e^{\frac{4}{3}x}+(1-x^2)\cdot e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{4}{3}\\
&=\left(\frac{4}{3}-2x-\frac{4}{3}x^2\right)e^{\frac{4}{3}x}\\
&=\frac{2}{3}(2-3x-2x^2)e^{\frac{4}{3}x}\\
&=\boldsymbol{\frac{2}{3}(2+x)(1-2x)e^{\frac{4}{3}x}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

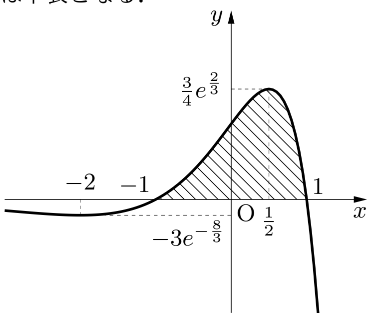
(ii) (i) の結果より，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲での $f(x)$ の増減は下表となる．

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

さらに

$$f(-2)=-3e^{-\frac{8}{3}},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$$




であるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図となる．

(iii) 求める部分の面積 $S$ は右図の斜線部分の面積である．部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\
&=\left[(1-x^2)\cdot e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{3}{4}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(-2x)\cdot e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{3}{4}\,dx\\
&=0+\frac{3}{2}\left(\left[x\cdot e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{3}{4}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}1\cdot e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{3}{4}\,dx\right)\\
&=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\left\{\left(e^{\frac{4}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}\right)-\left[e^{\frac{4}{3}x}\cdot\frac{3}{4}\right]_{-1}^{1}\right\}\\
&=\frac{9}{8}\left(\frac{1}{4}e^{\frac{4}{3}}+\frac{7}{4}e^{-\frac{4}{3}}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{9}{32}(e^{\frac{4}{3}}+7e^{-\frac{4}{3}})} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．