xy 平面上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとり，θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする．点 A は y 軸上の点で，y 座標が負であり，$\mathrm{AP} = 2$ を満たす．点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす点とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．
(2) 点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．
(3) 点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 熊本大 医 3)

【答】

(1) $\mathrm{Q}\left(4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{4-\cos^2\theta}\right)$
(2) x 座標の最大値 4，最小値 0，y 座標の最大値，最小値
(3) 2π

【解答】

(1) 点 P の座標は $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ である．A は y 軸上の点で y 座標が負の点であるから，A の座標を $(0,\ a)$ $(a < 0)$ とおくことができる．$\mathrm{AP} = 2$ より

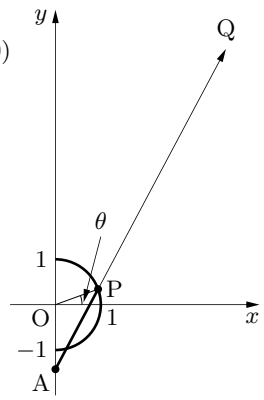
$$\sqrt{\cos^2\theta + (a - \sin\theta)^2} = 2$$
$$\cos^2\theta + (a - \sin\theta)^2 = 4$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$3 \leqq 4 - \cos^2\theta \leqq 4$ である．$a < 0$ であるから

$$a = \sin\theta - \sqrt{4-\cos^2\theta}$$

となる．したがって，点 A の座標は

$$\mathrm{A}\left(0,\ \sin\theta - \sqrt{4-\cos^2\theta}\right)$$



となる．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \left(0,\ \sin\theta - \sqrt{4-\cos^2\theta}\right) + 4\left(\cos\theta,\ \sqrt{4-\cos^2\theta}\right) \\ &= \left(4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{4-\cos^2\theta}\right)\end{aligned}$$

である．よって，点 Q の座標は

$$\mathbf{Q}\left(\mathbf{4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{4-\cos^2\theta}}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果から，点 Q の x 座標 $x = 4\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ は

$\theta = 0$ のとき　　**最大値 4**，　$\cdots\cdots$(答)
$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき　**最小値 0**　$\cdots\cdots$(答)

をとる．

次に，点 Q の y 座標 $y=\sin\theta+3\sqrt{4-\cos^2\theta}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値，最小値を求める．

$$y'=\cos\theta+3\frac{(-2\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)}{2\sqrt{4-\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\cos\theta(\sqrt{4-\cos^2\theta}+3\sin\theta)}{\sqrt{4-\cos^2\theta}}$$

である．y' の符号の変わり目となるのは，θ が

$$\sqrt{4-\cos^2\theta}+3\sin\theta=0$$

を満たすときであり

$$\sqrt{4-\cos^2\theta}=-3\sin\theta\iff\begin{cases}4-\cos^2\theta=9\sin^2\theta\\ \sin\theta\leqq0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4-\cos^2\theta=9(1-\cos^2\theta)\\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq0\end{cases}\iff\begin{cases}\cos^2\theta=\frac{5}{8}\\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq0\right)$$

これを満たす θ の値を α とおくと

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{5}{8}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq0\right)$$

である．y の増減は下表となる．

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

ここで

$$y_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=-1+3\sqrt{4-0}=5$$
$$y_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1+3\sqrt{4-0}=7$$
$$y_{\theta=\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{4-\frac{5}{8}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}+3\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}=2\sqrt{6}$$

したがって，点 Q の y 座標は

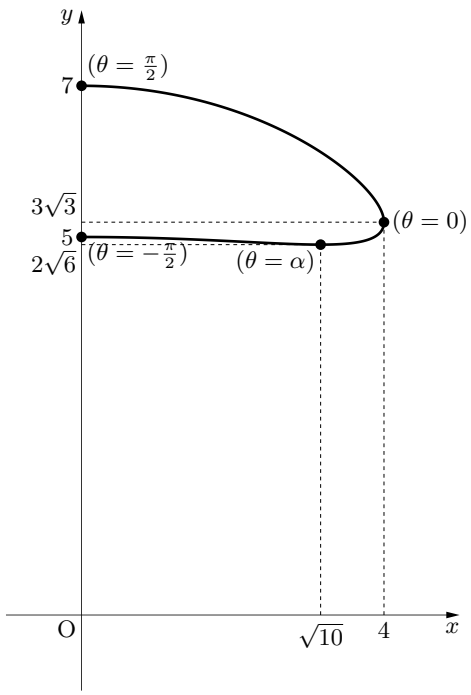
$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　**最大値 7**,　……(答)

$\theta=\alpha$ のとき　**最小値 $2\sqrt{6}$**　……(答)

をとる．

(3) (2) から，点 Q の x 座標，y 座標の増減をあわせて表にすると下のようになり，点 Q の軌跡は右図のようになる．

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
x'		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	↗	$\sqrt{10}$	↗	4	↘	0
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y	5	↘	$2\sqrt{6}$	↗	$3\sqrt{3}$	↗	7



点 Q の軌跡のうち

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ の部分を　$y = y_-$,

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分を　$y = y_+$

とおくと，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 y_+ \, dx - \int_0^4 y_- \, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + 3\sqrt{4 - \cos^2\theta}) \cdot (-4\sin\theta) \, d\theta \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sqrt{4 - \cos^2\theta}) \, d\theta
\end{aligned}
$$

である．ここで，$\sin^2\theta$ は偶関数，$\sin\theta\sqrt{4 - \cos^2\theta}$ は奇関数なので

$$
\begin{aligned}
S &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta \\
&= 4\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．