関数 $y = x\sqrt{9-x^2}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 増減を調べてこの関数のグラフの概形をかけ．

(2) この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ．

(23 琉球大 後 理 (数理) 1)

【答】

(1) 略

(2) 18

【解答】

$$y = x\sqrt{9-x^2}$$

(1) この関数の定義域は

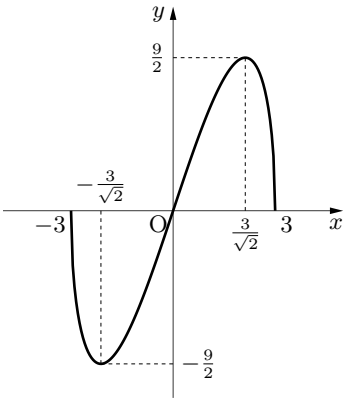
$$9 - x^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -3 \leqq x \leqq 3$$

である．関数を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} \\ &= \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

この関数は奇関数であるから，$x \geqq 0$ における増減を調べと，下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



極大値は

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{9-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{9}{2}$$

である．この関数のグラフは原点に関して対称であり，概形は右のようになる．

(2) この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積は，グラフの対称性に注意すると

$$\begin{aligned} &2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx \\ &= -\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,(9-x^2)'\,dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

……(答)

である．