xy 平面上において，不等式 $(ye^x)^2 \leqq (\sin 2x)^2$，$0 \leqq x \leqq \pi$ の表す領域を D とし，領域 D と直線 $x=a$ の共通部分の線分の長さを $l(a)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $l(a)$ が $a=a_0$ で最大となるとき，$\tan a_0$ の値を求めよ．
(2) 領域 D の面積を求めよ．

(23 群馬大 医 5)

【答】

(1) $\tan a_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
(2) $\dfrac{4}{5}(e^{-\frac{\pi}{2}}+1)^2$

【解答】

$$D : (ye^x)^2 \leqq (\sin 2x)^2,\ 0 \leqq x \leqq \pi$$

(1) 不等式の両辺を $(e^x)^2$ で割ると

$$y^2 \leqq (e^{-x}\sin 2x)^2$$

$f(x)=e^{-x}\sin 2x$ とおくと

$$(y-f(x))(y+f(x)) \leqq 0$$

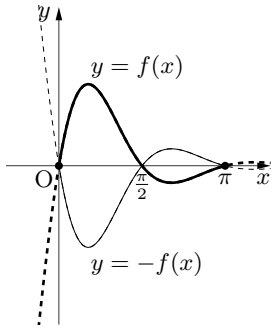
であり，領域 D は

$$-|f(x)| \leqq y \leqq |f(x)| \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

と表される．したがって，領域 D と直線 $x=a$ の共通部分の線分の長さ $l(a)$ は

$$l(a) = 2|f(a)|\ (0 \leqq a \leqq \pi)$$

である．$f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の増減を調べる．



$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\sin 2x + e^{-x}\cos 2x \cdot 2 \\ &= e^{-x}(-\sin 2x + 2\cos 2x) \\ &= -\sqrt{5}e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) \\ &= -\sqrt{5}e^{-x}\sin(2x-\alpha) \end{aligned}$$

ただし，α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の定角とする．
$-\alpha \leqq 2x-\alpha \leqq 2\pi-\alpha$ であるから，$f'(x)$ の符号は

$$2x-\alpha = 0,\ \pi,\ \text{すなわち}\ x = \frac{\alpha}{2},\ \frac{\pi+\alpha}{2}$$

で変わり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi+\alpha}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

したがって

$$(l(a)\ \text{の最大値}) = 2\max\left\{\left|f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|,\ \left|f\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right)\right|\right\}$$

である．

$$\left| f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\frac{\alpha}{2}} \sin\alpha,$$
$$\left| f\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right) \right| = -f\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right) = e^{-\frac{\pi+\alpha}{2}} \sin\alpha$$

であり，$e^{-\frac{\alpha}{2}} > e^{-\frac{\pi+\alpha}{2}}$，$\sin\alpha > 0$ であるから，$l(a)$ が最大となる a の値 a_0 は

$$a_0 = \frac{\alpha}{2}$$

である．このとき

$$\tan^2 a_0 = \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より $\tan a_0 = \tan\dfrac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\boldsymbol{\tan a_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であることに注意すると

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ では } f(x) \geqq 0, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \text{ では } f(x) \leqq 0$$

であるから，領域 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-f(x))\,dx\right\} \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

である．ここで，部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int e^{-x}\sin 2x\,dx \\ &= -e^{-x}\sin 2x + \int e^{-x}\cos 2x \cdot 2\,dx \\ &= -e^{-x}\sin 2x + 2\left\{-e^{-x}\cos 2x + \int e^{-x}(-\sin 2x)\cdot 2\right\}dx \\ &= -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int f(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (1+4)\int f(x)\,dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\therefore \quad \int f(x)\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{C}{5}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\left\{\Big[e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x)\Big]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\ &= -\frac{2}{5}\left\{2\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}(-2) - 2 - e^{-\pi}2\right\} \\ &= \frac{4}{5}(e^{-\pi} + 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 1) \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{5}(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1)^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．