$f(x)=x+2+\dfrac{2}{x-1}$ $(x \neq 1)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフと x 軸との交点，グラフの凹凸，変曲点，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) k を実数の定数とする．方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3) 曲線 $y=\log f(x)$ $(x>1)$ と直線 $y=\log 6$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(23 茨城大 理 1)

【答】

(1) 略

(2)

k	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+2\sqrt{2}$	$\cdots$
個数	2	1	0	1	2

(3) $S=$

【解答】

$$f(x)=x+2+\frac{2}{x-1}\ (x \neq 1)$$

(1) 増減，凹凸を調べる．

$$f'(x)=1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$$

関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸は下表となる．

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	0		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値：$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})+2+\dfrac{2}{(1-\sqrt{2})-1}=3-2\sqrt{2}$

極小値：$f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})+2+\dfrac{2}{(1+\sqrt{2})-1}=3+2\sqrt{2}$

変曲点はなし．

グラフと x 軸との交点の座標は $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-1}$ より　$(0,\ 0),\ (-1,\ 0)$

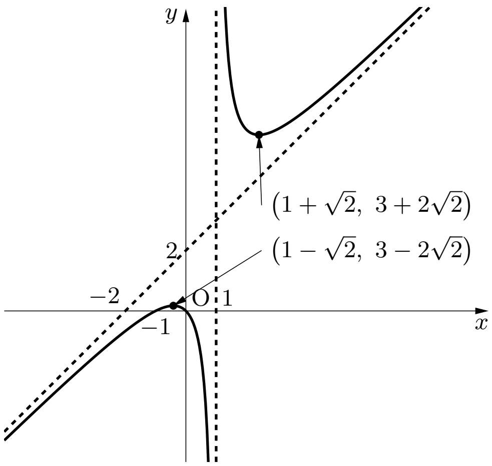
また

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(x+2)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1}=0$$

より，漸近線の方程式は

$$x=1,\quad y=x+2$$

である．以上より，グラフは下図となる．



(2) 方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数に一致するから

$\boldsymbol{k}$	$\cdots$	$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$	$\cdots$
個数	**2**	**1**	**0**	**1**	**2**

……(答)

である．

(3) 曲線 $y=\log f(x)\ (x>1)$ と直線 $y=\log 6$ の交点の x 座標を求める．

$$\log f(x)=\log 6 \iff f(x)=6$$

$$f(x)-6=\left(x+2+\frac{2}{x-1}\right)-6=x-4+\frac{2}{x-1}=\frac{(x-4)(x-1)+2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-5x+6}{x-1}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$$

よって，$y=\log f(x)\ (x>1)$ と $y=\log 6$ の交点の x 座標は

$$x=2,\ 3$$

である．

$$1<x\leqq 2,\ 3\leqq x \text{ のとき，}\quad f(x)\geqq 6 \qquad \therefore\quad \log f(x)\geqq \log 6$$
$$2\leqq x\leqq 3 \text{ のとき，}\quad f(x)\leqq 6 \qquad \therefore\quad \log f(x)\leqq \log 6$$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_2^3\{\log 6-\log f(x)\}\,dx$$
$$=\int_2^3\left\{\log 6-\log\frac{x(x+1)}{x-1}\right\}dx$$
$$=\int_2^3\{\log 6-\log x-\log(x+1)+\log(x-1)\}\,dx$$

である．ここで

$$\int_2^3 \log 6\,dx = \Big[x\log 6\Big]_2^3 = \log 6$$
$$\int_2^3 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_2^3 = 3\log 3 - 2\log 2 - 1$$
$$\int_2^3 \log(x+1)\,dx = \Big[(x+1)\log(x+1) - x\Big]_2^3 = 4\log 4 - 3\log 3 - 1$$
$$\int_2^3 \log(x-1)\,dx = \Big[(x-1)\log(x-1) - x\Big]_2^3 = 2\log 2 - 1$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \log 6 - (3\log 3 - 2\log 2 - 1) - (4\log 4 - 3\log 3 - 1) + (2\log 2 - 1) \\ &= 1 + \log 6 - 4\log 4 + 4\log 2 \\ &= 1 + (\log 2 + \log 3) - 8\log 2 + 4\log 2 \\ &= \mathbf{1 - 3\log 2 + \log 3} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

- $y = \log f(x)$，$y = \log 6$ を図示すると下図となる (y 軸方向に 3 倍した)．