a を実数の定数とする．2 つの曲線 $y=x^2$，$y=\log x+a$ が共有点 P をもち，点 P において共通の接線 L をもつとする．また，点 P を通り接線 L と垂直に交わる直線を N とする．以下の問いに答えよ．

(1) 定数 a の値を求めよ．
(2) 接線 L の方程式を求めよ．
(3) 直線 N の方程式を求めよ．
(4) 接線 L，直線 N，および y 軸で囲まれた図形 D の面積 S を求めよ．
(5) 原点 O を通り，(4) で求めた図形 D の面積 S を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

(23 豊橋技科大 2)

【答】

(1) $a=\dfrac{1+\log 2}{2}$

(2) $L: y=\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2}$

(3) $N: y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+1$

(4) $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

(5) $y=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}x$

【解答】

$$y=x^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=\log x+a \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $f(x)=x^2$，$g(x)=\log x+a$ とおく．①，② が共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつということは

$$(*)\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

を満たす実数 t が存在するということである．このときの t が共有点 P の x 座標である．

$$f'(x)=2x \quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

より

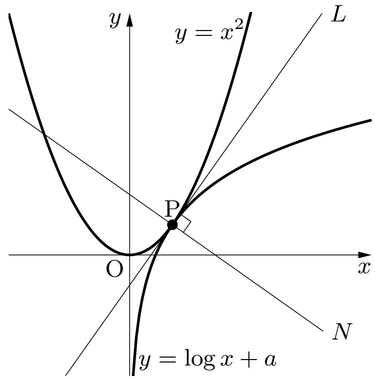
$$(*) \iff \begin{cases} t^2=\log t+a \\ 2t=\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t^2=\dfrac{1}{2} \\ a=t^2-\log t \end{cases}$$

(真数) >0 より $t>0$ であり

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad a=\frac{1}{2}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1+\log 2}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(2) L は $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線であるから，その方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) N は $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り L と垂直に交わる直線であるから，その方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) L, M と y 軸との交点をそれぞれ Q, R とおくと，Q, R の座標は

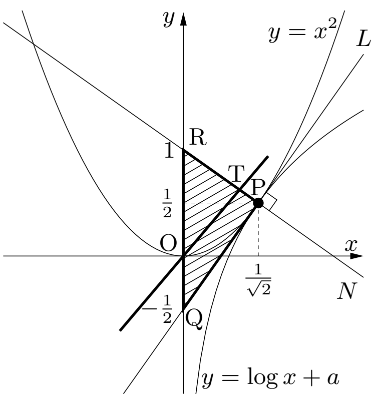
$$\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{R}(0,\ 1)$$

である．2 直線 L, N および y 軸で囲まれた図形 D は $\triangle\mathrm{PQR}$ であり，その面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{8}\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(5) $\mathrm{OR}>\mathrm{OQ}$ より，原点 O を通り $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を 2 等分する直線は線分 PR と交わる．この交点を T，T の x 座標を t とおくと

$$\triangle\mathrm{TOR}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{PQR}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad t=\frac{3}{8}\sqrt{2}$$

T の y 座標は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{2}+1=\frac{5}{8}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}\sqrt{2}}x \qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{5\sqrt{2}}{6}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．