関数 $F(x)=\sin x-\log(1+x)$ と $f(x)=F'(x)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ．

(2) $f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ．

(3) 開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x)>0$ であることを示せ．ただし，自然対数の底 e が $e>2.7$ を満たすことを用いてもよい．

(4) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y=\sin x$, 曲線 $y=\log(1+x)$ および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 金沢大 理系 1)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) $\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)\left\{1-\log\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

【解答】

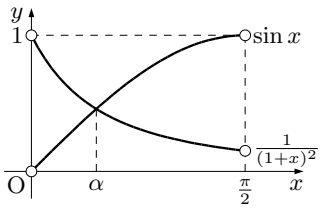
$$F(x)=\sin x-\log(1+x)$$

$$f(x)=F'(x)$$

(1) $$f(x)=F'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$$

さらに，微分して

$$f'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$$

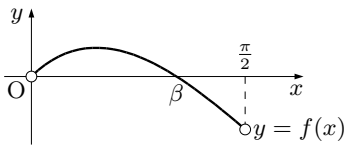


右図より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\alpha)=0$ を満たす α は 1 つだけ存在する．　……(証明終わり)

(2) (1) より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

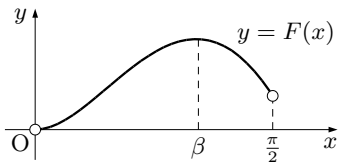
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{2}}<0$ であり，$f(\alpha)>f(0)=0$ とあわせると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(\beta)=0$ となる β が 1 つだけ存在する．　……(証明終わり)



(3) $F'(x)=f(x)$ と (2) の結果より，$F(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	

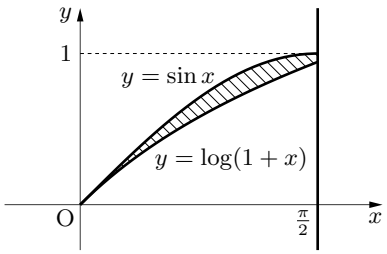
$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \\
&> 1-\log\left(1+\frac{3.2}{2}\right) \quad (\because\ \pi = 3.14\cdots) \\
&= 1-\log 2.6 \\
&> 1-\log e \quad (\because\ e > 2.7) \\
&= 0
\end{aligned}
$$



であり，$F(0) = 0$ とあわせると $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x) > 0$ である．

…… (証明終わり)

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y = \sin x$，曲線 $y = \log(1+x)$ および直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形は右図の斜線部分である．



この図形の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin x - \log(1+x)\}\,dx \\
&= \Big[-\cos x - (1+x)\log(1+x) + x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -0 - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 1 \\
&= \boldsymbol{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．