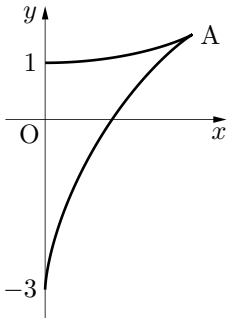
2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \sin 2t,$$
$$g(t) = 2\cos t - \cos 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

は右図のような概形をもつ．以下の問いに答えよ．この曲線を C として，以下の問いに答えよ．



(1) $\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2$ を $a\cos^2 bt$ (a, b は正の定数) の形に変形せよ．

(2) C 上で x 座標が最大となる点 A の座標と，対応する t の値 t_0 を求めよ．

(3) $0 < t < \pi$, $t \neq t_0$ を満たす t に対して，点 $(f(t),\ g(t))$ における C の接線の傾きを $m(t)$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{t \to t_0} m(t)$ を求めよ．

(4) 曲線 C の長さ L を求めよ．

(5) 曲線 C と y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(23 電気通信大 後 1)

【答】

(1) $16\cos^2 \dfrac{3}{2}t$

(2) $\mathrm{A}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$, $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$

(3) $\lim\limits_{t \to t_0} m(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $L = 8$

(5) $S = \pi$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = f(t) = 2\sin t + \sin 2t \\ y = g(t) = 2\cos t - \cos 2t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

(1) $f(t)$, $g(t)$ を t で微分すると

$$f'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$
$$g'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

であり

$$\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 = 16\cos^2\frac{3t}{2}\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) = \mathbf{16\cos^2\frac{3}{2}t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $0 < t < \pi$ において，$x' = f'(t) = 0$ を満たすのは

$$\cos\frac{3t}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad t = \frac{\pi}{3}$$

であり，$0 \leqq t \leqq \pi$ における $f(t)$ の増減は右表となる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

であり，C 上で x 座標が最大となる点 A の座標と，対応する t の値 t_0 は

$$\mathbf{A}\left(\frac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\right),\quad \boldsymbol{t_0=\frac{\pi}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $0<t<\pi,\ t_0 \neq t_0$ のとき

$$m(t)=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{4\cos\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2}}{4\cos\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$$

であるから

$$\lim_{t\to t_0} m(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{3}}\tan\frac{t}{2}=\tan\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

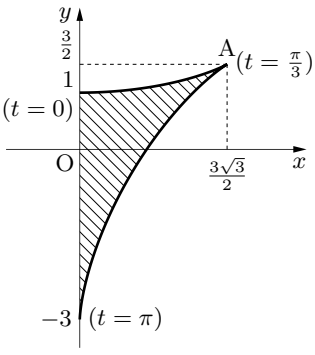
である．

(4) 曲線 C の長さ L は

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{\pi}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{3t}{2}}\,dt=4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{3t}{2}\right|dt\\
&=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{3t}{2}\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(-\cos\frac{3t}{2}\right)dt\right\}\\
&=4\left(\left[\frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right)\\
&=4\cdot\frac{2}{3}\{2\cdot1-(-1)\}\\
&=\boldsymbol{8}
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) C と y 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分であり，
$t=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$ に対応する曲線上の点は右図となる．



$0\leqq x\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ の範囲で x を固定したとき，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ に対応する C 上の点をそれぞれ $(x,\ y_1)$，$(x,\ y_2)$ とおく．$dx=f'(t)\,dt$ より

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}(y_1-y_2)\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}g(t)f'(t)\,dt-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}g(t)f'(t)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}g(t)f'(t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}g(t)f'(t)\,dt\\
&=\int_0^{\pi}(2\cos t-\cos2t)\cdot2(\cos t+\cos2t)\,dt\\
&=2\int_0^{\pi}(2\cos^2t+\cos2t\cos t-\cos^2 2t)\,dt\\
&=2\int_0^{\pi}\left(2\cdot\frac{1+\cos2t}{2}+\frac{\cos3t+\cos t}{2}-\frac{1+\cos4t}{2}\right)dt\\
&=\int_0^{\pi}(1+\cos t+2\cos2t+\cos3t-\cos4t)\,dt\\
&=\left[t+\sin t+\sin2t+\frac{\sin3t}{3}-\frac{\sin4t}{4}\right]_0^{\pi}\\
&=\boldsymbol{\pi}
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．