実数 $s,\ t$ が不等式

$$s+t>0$$

を満たしながら変化するとき，座標平面上で点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1+st}{s+t},\ \dfrac{1-st}{s+t}\right)$ の動く領域を D とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x=\dfrac{1+st}{s+t},\ y=\dfrac{1-st}{s+t}$ とおく．このとき，$s+t$ と st を $x,\ y$ の式で表せ．

(2) 領域 D を図示せよ．

(3) 関数 $f(x)=x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(4) 実数 $s,\ t$ が連立不等式

$$0<s+t\leqq 2,\quad \frac{1-st}{s+t}\leqq 1$$

を満たしながら変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1+st}{s+t},\ \dfrac{1-st}{s+t}\right)$ の動く領域の面積 S を求めよ．

(23 電気通信大 後 3)

【答】

(1) $s+t=\dfrac{2}{x+y}$，$st=\dfrac{x-y}{x+y}$

(2) 略

(3) $f'(x)=2\sqrt{x^2+1}$

(4) $S=\dfrac{1}{2}\{\sqrt{2}-1+\log(\sqrt{2}+1)\}$

【解答】

(1) $s+t\neq 0$ より

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+st}{s+t} \\ y=\dfrac{1-st}{s+t} \end{cases} \iff \begin{cases} x(s+t)-st=1 & \cdots\cdots ① \\ y(s+t)+st=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$(x+y)(s+t)=2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{s+t=\frac{2}{x+y}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．① に代入すると

$$\frac{2x}{x+y}-st=1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{st}=\frac{2x}{x+y}-1=\boldsymbol{\frac{x-y}{x+y}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 領域 D は

$$(*)\begin{cases} s+t>0 \\ x=\dfrac{1+st}{s+t} \\ y=\dfrac{1-st}{s+t} \end{cases}$$

を満たす実数 $s,\ t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．(1) より

$$(*) \iff \begin{cases} s+t>0 \\ s+t=\dfrac{2}{x+y} \\ st=\dfrac{x-y}{x+y} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y>0 \\ s+t=\dfrac{2}{x+y} \\ st=\dfrac{x-y}{x+y} \end{cases}$$

$s,\ t$ は

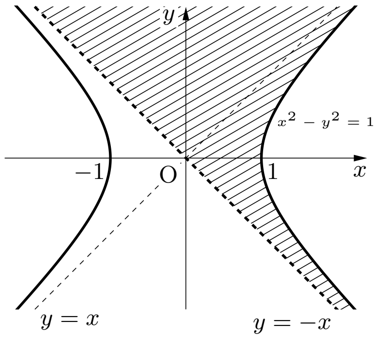
$$u^2-\frac{2}{x+y}u+\frac{x-y}{x+y}=0$$

の解であり，求める条件は

$$\begin{cases} x+y>0 \\ \text{判別式} : \left(\dfrac{2}{x+y}\right)^2-4\dfrac{x-y}{x+y} \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y>0 \\ 4-4(x-y)(x+y) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x+y>0 \\ x^2-y^2 \leqq 1 \end{cases}$$



となる．領域 D は右図の斜線部分であり，境界は双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点は含み，直線 $y=-x$ 上の点は除く．

(3) 関数 $f(x)=x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot\sqrt{x^2+1}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) 求める領域は

$$(**)\begin{cases} 0<s+t \leqq 2 \\ \dfrac{1-st}{s+t} \leqq 1 \\ x=\dfrac{1+st}{s+t} \\ y=\dfrac{1-st}{s+t} \end{cases}$$

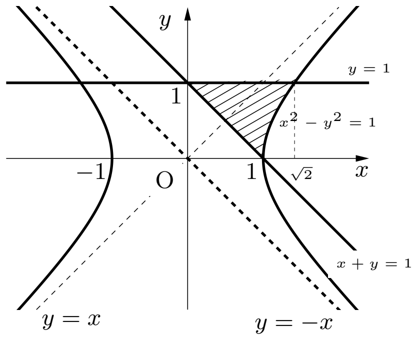
を満たす実数 $s,\ t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．$(**)$ は

$$(**) \iff \begin{cases} s+t=\dfrac{2}{x+y} \\ st=\dfrac{x-y}{x+y} \\ 0<\dfrac{2}{x+y} \leqq 2 \\ y \leqq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} s+t=\dfrac{2}{x+y} \\ st=\dfrac{x-y}{x+y} \\ 1 \leqq x+y \\ y \leqq 1 \end{cases}$$

であるから，求める領域を表す不等式は (2) と同じように変形すると

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leqq 1 \\ 1 \leqq x + y \\ y \leqq 1 \end{cases}$$

である．これを図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．



境界の双曲線は $x^2 - y^2 = 1$ かつ $x > 0$ より

$$x = \sqrt{y^2+1}$$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sqrt{y^2+1}\,dy - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} f'(y)\,dy - \frac{1}{2} \quad (\because\ (3)) \\ &= \frac{1}{2}\Big[f(y)\Big]_0^1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\} - \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{\sqrt{2} - 1 + \log(\sqrt{2}+1)\}} \end{aligned}$$

……（答）

である．