関数

$$f(x)=\frac{\log x}{(x+e)^2} \quad (x>0)$$

を考える．ただし，$\log x$ は e を底とする自然対数を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x+e)^3}$ と表すとき，$g(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ．さらに，$x>0$ の範囲で方程式 $g(x)=0$ がただ一つの実数解をもつことを示せ．必要なら $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてもよい．

(3) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(4) 定積分 $I=\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(x+e)}\,dx$ を求めよ．

(5) 曲線 $y=f(x)$，x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(23 電気通信大 2)

【答】

(1) $g(x)=x+e-2x\log x$

(2) 極大値 $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=e+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，証明略．

(3) 極大値 $f(e)=\dfrac{1}{4e^2}$

(4) $I=\dfrac{1}{e}\log\dfrac{1+e}{2}$

(5) $S=\dfrac{1}{e}\log\dfrac{1+e}{2}-\dfrac{1}{2e}$

【解答】

$$f(x)=\frac{\log x}{(x+e)^2} \quad (x>0)$$

(1) 商の微分法を用いると

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x+e)^2-\log x\cdot 2(x+e)}{(x+e)^4}=\frac{x+e-2x\log x}{x(x+e)^3}$$

であるから，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x+e)^3}$ となる $g(x)$ は

$$\boldsymbol{g(x)=x+e-2x\log x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x)&=1-2\left(1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &=-(1+2\log x)\end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$g(x)$ の増減は右表となり，$g(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ のとき

$$\text{極大値 } g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}+e-\frac{2}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{e+\frac{2}{\sqrt{e}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．また，$g(x)$ の左端，右端は

$$\lim_{x\to+0} g(x) = 0 + e - 2\cdot 0 = e \quad (\because \lim_{x\to+0} x\log x = 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\{x(1-2\log x)+e\} = -\infty$$

である．$g(x)$ は連続であるから，曲線 $y=g(x)$ と x 軸は $x>0$ において共有点を 1 個もつ．よって，$x>0$ の範囲で方程式 $g(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ．　…… (証明終わり)

(3) $g(e)=0$ であり，(2) より $g(x)$ は $x=e$ で符号を正から負に変える．

これにより $f(x)$ の増減は右表となり，$f(x)$ は $x=e$ のとき

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

$$\text{極大値 } f(e) = \boldsymbol{\frac{1}{4e^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

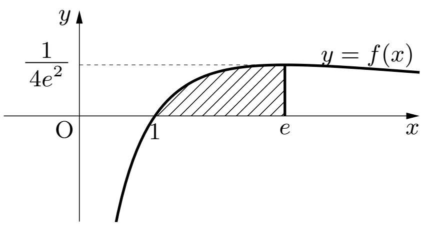
をとる．

(4) 被積分関数を部分分数分解すると

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \frac{1}{x(x+e)}\,dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{e}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+e}\right)dx \\
&= \frac{1}{e}\Big[\log|x| - \log|x+e|\Big]_1^e \\
&= \frac{1}{e}\Big[\log\Big|\frac{x}{x+e}\Big|\Big]_1^e \\
&= \frac{1}{e}\left(\log\frac{1}{2} - \log\frac{1}{1+e}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{e}\log\frac{1+e}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(5) $f(1)=0$ に注意すると，曲線 $y=f(x)$，x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分は右図の斜線部分である．面積 S は



$$\begin{aligned}
S &= \int_1^e \frac{\log x}{(x+e)^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{\log x}{x+e}\right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{(x+e)x} \\
&= -\frac{1}{2e} + 0 + \frac{1}{e}\log\frac{1+e}{2} \quad (\because (4)) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{e}\log\frac{1+e}{2} - \frac{1}{2e}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．