$t \geqq \dfrac{1}{2}$ で定義された2つの関数 $f(t)$，$g(t)$ を

$$f(t) = t\sqrt{t}, \quad g(t) = \sqrt{t(2t-1)}$$

とする．座標平面上の曲線 C の方程式が，媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

と表されるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸との共有点の座標を求めよ．
(2) 曲線 C と直線 $y = x$ との共有点の座標を求めよ．
(3) 曲線 C は不等式 $y \leqq x$ の表す領域に含まれることを示せ．
(4) 曲線 C 上の点 $\left(5\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}\right)$ における接線の方程式を求めよ．
(5) 曲線 C，直線 $y = x$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(23 電気通信大 3)

【答】

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)$
(2) $(1,\ 1)$
(3) 略
(4) $y = \dfrac{19}{45}x + \dfrac{8\sqrt{5}}{9}$
(5) $S = \dfrac{1}{10}$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = f(t) = t\sqrt{t} \\ y = g(t) = \sqrt{t(2t-1)} \end{cases}$$

(1) 曲線 C と x 軸との共有点においては

$$y = 0 \qquad \therefore \quad \sqrt{t(2t-1)} = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{2} \quad \left(\because\ t \geqq \frac{1}{2}\right)$$

である．このとき

$$x = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

であるから，曲線 C と x 軸の共有点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 曲線 C と直線 $y = x$ との共有点においては

$$f(t) = g(t) \qquad \therefore \quad t\sqrt{t} = \sqrt{t(2t-1)} \qquad \cdots\cdots ①$$

$t \geqq \dfrac{1}{2}$ であるから

$$① \iff t = \sqrt{2t-1} \iff t^2 = 2t-1$$
$$\therefore \quad (t-1)^2 = 0 \qquad \therefore \quad t = 1$$

よって，曲線 C と直線 $y = x$ の共有点の座標は

$$(f(1),\ g(1)) = \boldsymbol{(1,\ 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C が不等式 $y \leqq x$ を満たす領域に含まれるということは，曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ がつねに $y \leqq x$ を満たすということであり，$t \geqq \dfrac{1}{2}$ において，つねに $g(t) \leqq f(t)$ が成り立つということである．

$$f(t)-g(t)=\sqrt{t}(t-\sqrt{2t-1})=\frac{\sqrt{t}(t^2-(2t-1))}{t+\sqrt{2t-1}}=\frac{\sqrt{t}(t-1)^2}{t+\sqrt{2t-1}}\geqq 0$$

よって，C は 不等式 $y \leqq x$ を満たす領域に含まれる． ……(証明終わり)

(4) 曲線 C 上の点 $\left(5\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}\right)$ を与える t は

$$\begin{cases} t\sqrt{t}=5\sqrt{5} \\ \sqrt{t(2t-1)}=3\sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} t^3=5^3 \\ \sqrt{t(2t-1)}=3\sqrt{5} \end{cases} \qquad \therefore \quad t=5$$

である．

$$f'(t)=(t^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}\sqrt{t}$$
$$g'(t)=\frac{1}{2}\{t(2t-1)\}^{-\frac{1}{2}}(4t-1)=\frac{4t-1}{2\sqrt{t(2t-1)}}$$

であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\dfrac{4t-1}{2\sqrt{t(2t-1)}}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{t}}=\frac{4t-1}{3t\sqrt{2t-1}}$$

より，$t=5$ における微分係数は

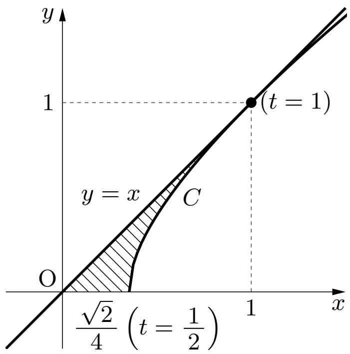
$$\frac{4\cdot 5-1}{3\cdot 5\sqrt{2\cdot 5-1}}=\frac{19}{45}$$

である．よって，曲線 C 上の点 $\left(5\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}\right)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{19}{45}(x-5\sqrt{5})+3\sqrt{5}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{19}{45}x+\frac{8\sqrt{5}}{9}}$$ ……(答)

である．

(5) $t \geqq \dfrac{1}{2}$ において，$f(t)$，$g(t)$ はともに単調増加である．また，(1)〜(3) から曲線 C の概形は右図のようになり，曲線 C，直線 $y=x$ および x 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分である．面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2-\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{1} y\,dx$$
$$=\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(t)f'(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{t(2t-1)}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{2t-1}\,dt$$

$\sqrt{2t-1}=u$ とおくと

$$t=\frac{u^2+1}{2} \qquad \therefore \quad dt=u\,du$$

t	$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	1
u	0	$\longrightarrow$	1

であるから

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{u^2+1}{2}\cdot u \cdot u\,du = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\int_0^1 (u^4+u^2)\,du \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{10}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.