関数 $f(x)=\dfrac{e^2}{\sqrt{x}}\log x\ (x>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減と極値，およびグラフの変曲点を調べよ．

(2) 連立不等式 $0 \leqq y \leqq \dfrac{e^2}{\sqrt{x}}\log x,\ 0<x\leqq e^2$ で定まる領域の面積 S を求めよ．

(3) (2) で定めた領域を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(23 三重大 工 3)

【答】

(1) 増減は略，極大値 $2e$，変曲点 $\left(e^{\frac{8}{3}},\ \dfrac{8}{3}e^{\frac{2}{3}}\right)$

(2) $S=4e^2$

(3) $V=\dfrac{8}{3}\pi e^4$

【解答】

$$f(x)=\frac{e^2}{\sqrt{x}}\log x \quad (x>0)$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=e^2\cdot\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-(\log x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{e^2(2-\log x)}{2x\sqrt{x}}$$

さらに，微分すると

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x\sqrt{x}-(2-\log x)\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}\\
&=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{-2-3(2-\log x)}{2x^2\sqrt{x}}\\
&=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{3\log x-8}{2x^2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減，凹凸は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$3^{\frac{8}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↗		↘		↘

$f(x)$ は

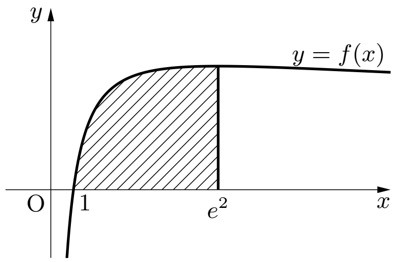
$$x=e^2 \text{ において，}\textbf{極大値 } f(e^2)=\frac{e^2}{\sqrt{e^2}}\log e^2=\boldsymbol{2e} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとり，$f(e^{\frac{8}{3}})=\dfrac{8}{3}e^{\frac{2}{3}}$ より，変曲点の座標は

$$\boldsymbol{\left(e^{\frac{8}{3}},\ \frac{8}{3}e^{\frac{2}{3}}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 連立不等式 $0 \leqq y \leqq \dfrac{e^2}{\sqrt{x}} \log x,\ 0 < x \leqq e^2$ で定まる領域は右図の斜線部分である．この領域の面積 S は



$$S = \int_1^{e^2} \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x \, dx$$

である．ここで

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log x \, dx \\
&= 2\sqrt{x} \log x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
&= 2\sqrt{x}(\log x - 2) + C
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
S &= e^2 \Big[2\sqrt{x}(\log x - 2) \Big]_1^{e^2} \\
&= 2e^2\{e \cdot 0 - (-2)\} \\
&= \boldsymbol{4e^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) 求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^{e^2} \pi \left(\frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x \right)^2 dx \\
&= \pi e^4 \int_1^{e^2} (\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \pi e^4 \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^{e^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{3} \pi e^4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．