以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で $y = x + 2\sin x$ の増減と極値，およびグラフの凹凸を調べよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ と $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で曲線 $y = x + 2\sin x$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(23 三重大 教育・生資 3–1)

【答】

(1) 増減，凹凸は略．極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$，極小値 $f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C_1$，$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$ （C_1，C_2 は積分定数)

(3) $V = 6\pi^2$

【解答】

(1) $$y = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

$f(x) = x + 2\sin x$ とおく．

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$
$$f''(x) = -2\sin x$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減と凹凸は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗		↘		↘		↗	2π

また

$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，極大値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}}$ ……(答)

$x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，極小値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}$ ……(答)

をとる．

(2) 部分積分法を用いると

$$\int x\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$= \boldsymbol{-x\cos x + \sin x + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{ は積分定数)} \qquad \text{……(答)}$$

また

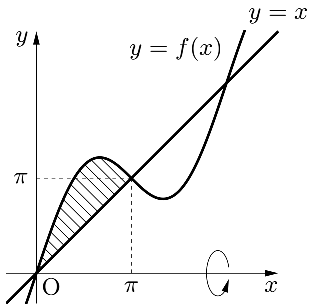
$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2} \qquad \text{……(答)}$$

である．

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は

$$x + 2\sin x = x \qquad \therefore \quad \sin x = 0$$
$$\therefore \quad x = 0,\ \pi$$

であり，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形は右図の斜線部分となる．



よって，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi} \pi\{(x + 2\sin x)^2 - x^2\}\,dx \\
&= \pi \int_0^{\pi} (4x\sin x + 4\sin^2 x)\,dx \\
&= 4\pi \left[(-x\cos x + \sin x) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} \\
&\qquad (\because\ (2)) \\
&= 4\pi\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{6\pi^2}
\end{aligned}$$

……(答)

である．