O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．
(b) 点 Q は yz 平面上にある．
(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

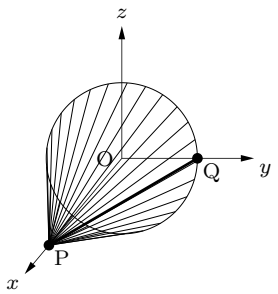
(23 京都大 理系 5)

【答】 $\dfrac{2\pi}{15}$

【解答】

まず，点 P を固定する．(a) より P の座標を $(t,\ 0,\ 0)$ とおくことができる．(c) より

$$\begin{aligned} &\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=1 \\ \therefore\quad &\mathrm{OQ}=1-\mathrm{OP} \\ &\quad\ =1-|t|\ (-1\leqq t\leqq 1) \end{aligned}$$



である．(b) もあわせると，点 Q は yz 平面上で原点 O を中心とする半径 $1-|t|$ の円周を描く．このとき，線分 PQ が通過してできる曲面は，P を頂点し OP を軸とする直円錐の側面である．点 Q を y 軸上の点 $(0,\ 1-|t|,\ 0)$ としてもよい．

ついで，P を $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で動かすと，P が x 軸上，Q が y 軸上を動き線分 PQ の通過領域ができる．この領域を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体が，題意の立体である．

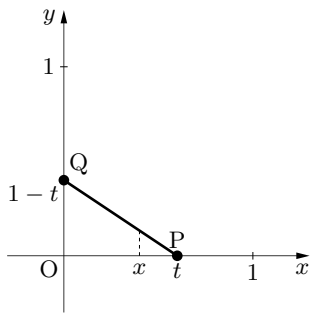
線分 PQ の通過領域は x 軸，y 軸に関して対称であるから，領域

$$0\leqq x\leqq 1 \text{ かつ } 0\leqq y\leqq 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

で考えることにする．このときの線分 PQ の通過領域 D を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積の 2 倍が求める体積である．

xy 平面上でに点 P の座標を $(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおくと，点 Q の座標は $(0,\ 1-t)$ であり，直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned} &t=0 \text{ のとき} && x=0 \\ &0<t\leqq 1 \text{ のとき} && y=\frac{t-1}{t}x+1-t \end{aligned}$$



となる．線分 PQ の通過領域 D は,「原点 O(0, 0) と点 (0, 1) を結ぶ線分」と「線分 PQ $(0\leqq x\leqq t)$ の通過領域」の和集合である．

$0<t\leqq 1$ のときの線分 PQ の通過領域を求める．

まず，x を $0\leqq x\leqq 1$ で固定すると，t は $x\leqq t\leqq 1$ の範囲で動く．このときの y のとりうる値の範囲を求める．

$t\neq 0$ であり，t が $x\leqq t\leqq 1$ の範囲で動くことから，$x=0,\ x\neq 0$ の場合分けをする．

(i) $x=0$ のとき，$y=1-t$ であり，$0<t\leqq 1$ であるから $0\leqq y<1$ である．
これは「原点 O(0, 0) と点 (0, 1) を結ぶ線分」に含まれる．

(ii) $x\neq 0$ のとき

$$f(t)=\frac{t-1}{t}x+1-t\ (x\leqq t\leqq 1)$$

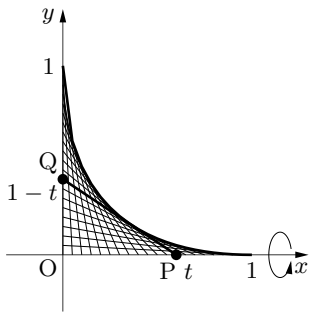
とおく．$x < t < 1$ のとき

$$f'(t) = \frac{1 \cdot t - (t-1) \cdot 1}{t^2} x - 1$$
$$= \frac{x - t^2}{t^2}$$

t	x	$\cdots$	$\sqrt{x}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

である．$f(x)$ の増減は右表となる．ここで，極大値は

$$f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} x + 1 - \sqrt{x}$$
$$= (\sqrt{x}-1)\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}$$
$$= (1-\sqrt{x})^2$$



である．$y = f(\sqrt{x})$ について $f(\sqrt{0}) = 1$，$f(\sqrt{1}) = 0$ となることから，(i)，(ii) あわせた線分 PQ の通過領域は

$$0 \leqq y \leqq f(\sqrt{x}) \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

であり，これは線分 PQ の通過領域 D でもある．

立体は yz 平面に関して対称なので，求める体積 V は

$$V = 2 \times \int_0^1 \pi \{(1-\sqrt{x})^2\}^2 \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 \, dx$$

ここで，$u = 1 - \sqrt{x}$ とおくと

$$x = (1-u)^2 \qquad dx = 2(1-u)(-1)\,du$$

x	0	$\longrightarrow$	1
u	1	$\longrightarrow$	0

なので

$$V = 2\pi \int_1^0 u^4 \cdot 2(1-u)(-1)\,du$$
$$= 4\pi \int_0^1 (u^4 - u^5)\,du$$
$$= 4\pi \left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 \right]_0^1$$
$$= 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2\pi}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $$\begin{cases} t = 0 \text{ のとき} & x = 0 \\ 0 < t \leqq 1 \text{ のとき} & y = \dfrac{t-1}{t} x + 1 - t \end{cases}$$

  で表される直線 PQ の方程式は

  $$(1-t)x + ty + t(t-1) = 0$$

  としてまとめることができる．

  t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの線分 PQ の通過領域は，領域

  $$0 \leqq x \leqq 1 \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

のもとで t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの直線 $(1-t)x+ty+t(t-1)=0$ の通過領域である．それは

$$t^2+(y-x-1)t+x=0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

をみたす t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．$g(t)=t^2+(y-x-1)t+x$ おき，$g(0)g(1)(=xy)$ の符号で場合分けする．

$(*)$ のもとでは，$xy<0$ となることはないから

(I) $xy=0$ のとき

(i) $x=0$ のとき

$$㋐ \iff t^2+(y-1)t=0 \qquad \therefore \quad t=0,\ 1-y$$

$x=0$ は条件を満たす．

$(*)$ とあわせると，線分 $x=0$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ である．

(ii) $y=0$ のとき

$$㋐ \iff t^2-(x+1)t+x=0$$
$$(t-1)(t-x)=0 \qquad \therefore \quad t=1,\ t=x$$

$y=0$ は条件を満たす．

$(*)$ とあわせると，線分 $y=0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ である．

(II) $xy>0$ のとき

$$\begin{cases} \text{判別式}: (y-x-1)^2-4x \geqq 0 & \cdots\cdots ㋑ \\ \text{軸の位置}: 0 \leqq -\dfrac{y-x-1}{2} \leqq 1 & \cdots\cdots ㋒ \\ \text{端点の符号}: x>0 \text{ かつ } y>0 & \cdots\cdots ㋓ \end{cases}$$

㋑ を整理すると

$$㋑ \iff (y-x-1)^2-(2\sqrt{x})^2 \geqq 0$$
$$(y-x-1-2\sqrt{x})(y-x-1+2\sqrt{x}) \geqq 0$$
$$\left(y-(1+\sqrt{x})^2\right)\left(y-(1-\sqrt{x})^2\right) \geqq 0$$
$$\therefore \quad y \leqq (1-\sqrt{x})^2 \text{ または } (1+\sqrt{x})^2 \leqq y$$

㋒ を整理すると

$$x-1 \leqq y \leqq x+1$$

$(*)$，㋑，㋒，㋓ をまとめると

$$\begin{cases} 0<x \leqq 1 \\ 0<y \leqq (1-\sqrt{x})^2 \end{cases}$$

よって，$(*)$ のもとで，(I)，(II) をまとめると

$$0 \leqq y \leqq (1-\sqrt{x})^2 \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

となる．

- 直線族 $\{l_t\}$ を

$$l_t: a(t)x+b(t)y+c(t)=0 \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

の包絡線を求める．$x,\ y$ を定数とみて，辺々を t で微分した式を

$$a'(t)x+b'(t)y+c'(t)=0 \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

とおくと，直線 $\{l_t\}$ の包絡線が存在するとき，それは「ⓐ かつ ⓑ」を満たす t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である (高校数学の範囲外)．

本問では

$$l_t : (1-t)x + ty + t(t-1) = 0 \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

について，x，y を定数とみて，辺々を t で微分すると

$$-x + y + 2t - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

$$\therefore \quad t = \frac{1+x-y}{2}$$

であり,「ⓐ かつ ⓑ」を連立して得られる x，y の方程式

$$\left(1 - \frac{1+x-y}{2}\right)x + \frac{1+x-y}{2}y + \frac{1+x-y}{2}\left(\frac{1+x-y}{2} - 1\right) = 0$$

が l_t の包絡線である．式を整理すると

$$x - \frac{1+x-y}{2}(x-y+1) + \left(\frac{1+x-y}{2}\right)^2 = 0$$

$$x - \left(\frac{1+x-y}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \quad 1 + x - y = \pm 2\sqrt{x}$$

$$\therefore \quad y = (1 \mp \sqrt{x})^2$$

$(*)$ も考慮すると，求める包絡線は

$$y = (1 - \sqrt{x})^2$$

である．