xyz 空間内で 4 点 (0, 0, 0)，(1, 0, 0)，(1, 1, 0)，(0, 1, 0) を頂点とする正方形の周および内部を K とし，K を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を K_x，K を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を K_y とする．さらに，K_x と K_y の共通部分を L とし，K_x と K_y の少なくともどちらか一方に含まれる点全体からなる立体を M とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) K_x の体積を求めよ．
(2) 平面 $z=t$ が K_x と共有点をもつような実数 t の値の範囲を答えよ．また，このとき，K_x を平面 $z=t$ で切った断面積 $A(t)$ を求めよ．
(3) 平面 $z=t$ が L と共有点をもつような実数 t の値の範囲を答えよ．また，このとき，L を平面 $z=t$ で切った断面積 $B(t)$ を求めよ．
(4) L の体積を求めよ．
(5) M の体積を求めよ．

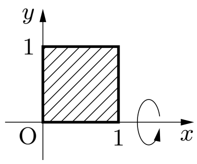
(23 京都産大 理・情報理工)

【答】

(1) π
(2) $-1 \leqq t \leqq 1$，$A(t)=2\sqrt{1-t^2}$
(3) $-1 \leqq t \leqq 1$，$B(t)=1-t^2$
(4) $\dfrac{4}{3}$
(5) $2\pi-\dfrac{4}{3}$

【解答】

(1) 正方形の周および内部である図形 K は xy 平面上にあり，図示すると，右図の斜線部分である．境界線を含む．



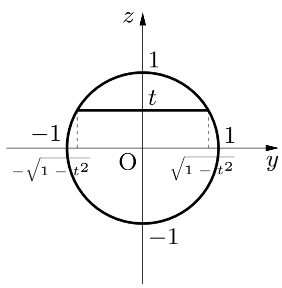
K_x は K を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体であるから，K_x は底面の半径が 1，高さが 1 の円柱である．

よって，K_x の体積は

$$\pi\cdot 1^2\cdot 1=\boldsymbol{\pi}$$ ……(答)

である．

(2) 直円柱 K_x を表す不等式は



$$\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

であり，平面 $z=t$ が K_x と共有点をもつような実数 t の値の範囲は

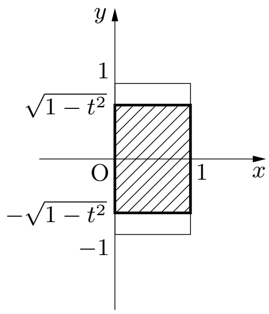
$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$$ ……(答)

である．K_x を平面 $z=t$ で切った切り口は

$$\begin{cases} y^2+t^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

で表される領域である．

これを平面 $z=t$ に図示すると，右図の斜線部分となる．よって，断面積 $A(t)$ は



$$A(t)=2\sqrt{1-t^2}\cdot 1$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{1-t^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 直円柱 K_y を表す不等式は

$$\begin{cases} x^2+z^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$$

であり，平面 $z=t$ が K_y と共有点をもつような実数 t の値の範囲は

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

である．

K_x と K_y がともに平面 $z=t$ と共有点をもつとき，L は平面 $z=t$ と共有点をもつから，求める t の範囲は

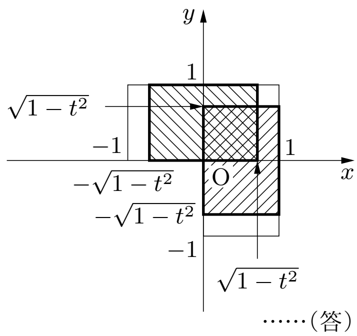
$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

t を $-1 \leqq t \leqq 1$ で固定すると，K_y を平面 $z=t$ で切った切り口は

$$\begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$$

で表される領域であるから，K_x，K_y を平面 $z=t$ で切った断面を図示すると，右図となる．

よって，L を平面 $z=t$ で切った切口は図の二重斜線部分であるから，断面積 $B(t)$ は



$$B(t)=\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2=\boldsymbol{1-t^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) L の体積は

$$\int_{-1}^{1} B(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt=\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}=\boldsymbol{\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) M の体積は，K_x と K_y の体積の和から，共通部分である L の体積を引いて求められる．

K_y の体積は K_x の体積と等しいから，求める体積は

$$\pi+\pi-\frac{4}{3}=\boldsymbol{2\pi-\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．